Brückenkurs 2014

7. April 2014

1 Differentiation

Ableitungen geben die Steigung einer Funktion an jedem Ort x an.
Definiert ist die Ableitung durch den Grenzwert des Differentialquotienten.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Unter der Vorraussetzung, dass Ableitungen von einigen elementaren Funktionen bekannst sind, gibt es drei relevante Ableitungsregeln.
Es gilt stets $f(x)$, $g(x)$ stetig diff'bare Fkt'en, sowie λ, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\text{Summenregel}: (\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda \cdot f'(x) + \mu \cdot g'(x) \tag{2}$$

$$\text{Produktregel}: (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{3}$$

$$\text{Kettenregel}: (f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \tag{4}$$

Hier die Ableitungen von elementaren Funktionen:

$$f(x) = 1 \to f'(x) = 0 \tag{5}$$

$$f(x) = x \to f'(x) = 1 \tag{6}$$

$$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x \tag{7}$$

$$f(x) = \ln(x) \to f'(x) = \frac{1}{x} \tag{8}$$

$$f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x) \tag{9}$$

$$f(x) = \cos(x) \to f'(x) = -\sin(x) \tag{10}$$

Herleitung der Ableitung einer Polynomfkt mit Hilfe der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^n = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{\text{n mal}} \\
f'(x) &= \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x)'}_{\text{n mal}} = x \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)'}_{\text{n-1 mal}} + x' \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{\text{n-1 mal}} \\
&= x \cdot (x^{n-1})' + x^{n-1} \\
&= x \cdot (x \cdot (x^{n-2})') + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} \\
&= \cdots \\
&= x^{n-1} \cdot x' + (n-1)x^{n-1} \\
&= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

Höhere Ableitungen erfolgen durch wiederholtes Ableiten. D.h. die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten Ableitung.
Ein lokales Extremum ist, wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung die Funktion den größten bzw. kleinsten Wert annimmt. Es gilt:

$$f(\tilde{x}) \equiv \text{lokales Extremum am Ort } \tilde{x} \tag{11}$$

$$f'(\tilde{x}) = 0 \tag{12}$$

$$f''(\tilde{x}) \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{lokales Minimum} \\ < 0 \rightarrow \text{lokales Maximum} \end{cases} \tag{13}$$

Ein globaler Extrempunkt ist der Punkt der den größten oder kleinsten Fkt'wert im gesamten Definitionsbereich annimmt. Es ist also möglich, dass dies der Wert am Rand des Definitionsbereichs ist, auch wenn hier die erste Ableitung ungleich Null ist.

2 Taylorreihen

Taylorreihen entwickeln Fkt'en in einer Potenzreihe.

$$f(x) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \text{ Entwicklung um 0} \tag{14}$$

$$f(x) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \text{ Entwicklung um } x_0 \tag{15}$$

Wenn nach einer Anzahl von Termen die Reihe abgebrochen wird, so approximiert man die Fkt. in der Umgebung von x_0. Je mehr Terme benutzt werden, umso genauer ist diese Approximation.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\sin(x)\\
n = 1 : f_T(x) &= -x\\
n = 3 : f_T(x) &= -x + \frac{x^3}{6}\\
n = 5 : f_T(x) &= -x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\\
n \to \infty : f_T(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Taylorreihen sind von großer Bedeutung in der Physik, da komplexe Ausdrücke in bestimmter Näherung vereinfacht werden können, so dass ein Weiterrechnen möglich ist.

3 Integration

Das Bilden der Stammfunktion $F(x) = \int f(x)dx$ ist die Umkehropertation der Ableitung. Dies wird auch das Bilden des unbestimmten Integrals bzw. Integration genannt. Der Fundamentalsatz der Analysis lautet:

$$F'(x) = f(x) \tag{16}$$

Das bestimmte Integral ist die vorzeichenbehaftete Fläche einer Funktion zwischen zwei Punkten a und b ($a > b$). Diese wird berechnet durch die Differenz von $F(a)$ und $F(b)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{17}$$

Der Fundamentalsatz für bestimmte Integrale lautet:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{18}$$

Auch bei der Integration existieren drei relevante Regeln:

$$\text{Summenregel} : \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \tag{19}$$

$$\text{Substitutionsregel} : \int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y)) \cdot g'(y)dy \tag{20}$$

$$\text{partielle Integration} : \int_a^b f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) \mid_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{21}$$

Herleitung der partiellen Integration aus der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
(f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx &= \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx \\
f(x) \cdot g(x) \mid_{x=a}^{x=b} &= \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx \\
\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx &= f(x) \cdot g(x) \mid_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx
\end{aligned}
$$

Weitere nützliche Eigenschaften sind:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx \ , \ a \leq c \leq b \tag{22}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{23}$$

Beispiel für die Anwedung der Regeln:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \ln(x) dx \\
&x = e^y, \ \frac{dx}{dy} = e^y \rightarrow dx = e^y dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \ln(x) &= \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \ln(e^y) dy = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} y dy \\
&= y e^y \mid_{y=\ln(a)}^{y=\ln(b)} - \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} e^y dy \\
&= \ln(b) e^{\ln(b)} - \ln(a) e^{\ln(a)} - e^{\ln(b)} + e^{\ln(a)} \\
&= \ln(b) b - \ln(a) a - b + a
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Stammfunktion des Logarithmuses:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x \tag{24}$$

4 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen in die Ebene. Einer Interpretation von ihnen ist, dass sie ein Paar von reellen Zahlen sind, welches erlaubt, gewisse Rechenoperationen geschlossen im neuen Raum $\mathbb{C}$ durchführen zu können.
Die komplexe Einheit i ist wie folgt definiert:

$$i \cdot i = -1 \rightarrow \sqrt{-1} = \pm i \tag{25}$$

Es gibt zwei Darstellungsformen, die Kartesische und die Polare.
Bei der kartesischen Form wird eine komplexe Zahl durch ihren Real- und Imaginärteil dargestellt.

$$z = a + ib \text{ , mit } z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R} \tag{26}$$

Wobei a der Realteil und b der Imaginärteil ist.
Diese Darstellung heiß kartesisch, da sie die Koordinatendarstellung einers Punktes im $\mathbb{R}^2$ über die kartesischen Koordinatenachsen angibt. Addition und Substraktion können somit als Vektoraddition bzw. -substraktion verstanden werden.
Bei der Polarform erfolgt die Darstellung durch Amplidude und Phase.

$$z = re^{i\phi} \text{ , mit } z \in \mathbb{C}, r, \phi \in \mathbb{R} \tag{27}$$

Man schreibt auch:

$$|z| = r, \arg(z) = \phi. \tag{28}$$

Man nennt diese Darstellung polar, da sie die Koordinatendarstellung eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ über die Polarkoordinaten angibt.
Die Eulersche Gleichung lautet:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi) \tag{29}$$

Daraus folgen die Relationen.

$$Re(z) = r\cos(\phi),\ Im(z) = r\sin(\phi) \tag{30}$$

Der Betrag von z lässt sich berechnen durch:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \tag{31}$$

Die komplexe Konjugation wird definiert durch:

$$z^* = a - ib \tag{32}$$

Das Produkt von zwei komplexen Zahlen berechnet sich durch einfaches Ausmultiplizieren.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + ib_1ib_2 \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + b_2a_1) \end{aligned}$$

Bei der Division muss man den Bruch durch das komplex Konjugierte des Nenners erweitern.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1z_2^*}{z_2z_2^*} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - b_2a_1)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Ziehen von Wurzeln bzw. das Exponentieren geschieht am besten in der Polarform:

$$z^n = r^n e^{in\phi}$$

Trigonometrische Fkt'en können durch die Eulersche Gleichung komplex ausgedrückt werden.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \tag{33}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \tag{34}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \tag{35}$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \tag{36}$$

5 Differentialgleichung

Differentialgleichungen sind vielleicht das Kernkonzept der theoretischen Physik. Anders als bei normalen Gleichungen, die man durch Umstellen nach einer Variablen löst, muss man hier eine Fuktion finden, über die Informationen bzgl. ihrer Ableitungen vorliegen. Neben der Differentialgleichung benötigt man meist Randbedingungen, um die gesuchte Funktion eindeutig lösen zu können.
Die Anzahl der freien Parameter der Lösung ohne Randbedingungen ist dabei gleich dem Grad der höchsten Ableitung, die in der Dgl vorkommt.
Ein Besipiel für eine einfache Dgl 2. Ordnung lautet:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 1$$

Mit der Lösung $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$, wie sich durch Ableiten und Einsetzten leicht beweisen lässt.
Einfache Dgl's kann man durch einfaches Integrieren lösen.
Hierzu das Beispiel von oben:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 1$$
$$\int \frac{d^2}{dx^2} f(x) dx = \int 1 dx$$
$$\frac{d}{dx} f(x) + b_1 = x + b_2$$

Da b_1 und b_2 nicht voneinander abhängen, kann definiert werden:

$$b_2 - b_1 = b \rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = x + b$$

Da noch immer die Dgl nicht gelöst ist, muss noch einmal integriert werden:

$$\int \frac{d}{dx} f(x) dx = \int (x+b) dx$$
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$$

Durch zweifachen Ableiten kann die Richtigkeit überprüft werden:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$$
$$f'(x) = x + b$$
$$f''(x) = 1$$

Nun können Randbedingungen gegeben sein. Z.B. $f'(0) = 1$ und $f(0) = 0$. Einsetzten liefert:

$$1 = b$$
$$0 = c$$

Damit ergibt sich die Fkt. zu:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$

Ein weiteres Verfahren ist das Lösen durch Trennung der Variablen. Hier werden Ableitungen in der Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ benutzt. Ziel ist es hier, Variablen und Differentiale einer Sorte auf jeweils eine Seite zu bringen und diese dann zu integrieren.
Auch hier ein Beispiel:

$$y' = y^2$$
$$\frac{dy}{y^2} = dx$$
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$
$$-\frac{1}{y} = x + c$$
$$y(x) = -\frac{1}{x+c}$$

Im Fall einer homogenen, linearen Dgl 2. Ordnung hilft das Raten eines Ansatzes weiter. Eine solche Dgl lautet:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$$

Es wird der folgende Ansatz und seine Ableitungen benutzt:

$$y(x) = Ce^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda Ce^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 Ce^{\lambda x}$$

Einsetzten in die Dgl liefert.

$$Ce^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$$

Die Gleichung ist genau dass erfüllt, wenn gilt:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Diese Gleichung wird auch das charakteristisches Polynom der Dgl genannt.
Wenn gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist die Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Wenn hingegen gilt $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist die Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$