Prof. Dr. M. Garcia
T. Zier
T. Müller

Brückenkurs *Theoretische Physik*

Aufgabenblatt 2

1)

i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen

$$f_1(x,y,z) = x\,y^5 + z\ , \quad f_2(x,y,z) = z\ln(x)\ .$$

Berechnen Sie

$$\partial^2_{x,y} f_1(x,y,z) \quad \text{und} \quad \partial^2_{y,x} f_1(x,y,z)$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse.

ii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Skalarfelder

$$\phi_1(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|\ , \quad \phi_2(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\ , \quad \phi_3(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2} \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

iii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \big(x\,y, x+z^2, y^2-z\big)\ .$$

2) Betrachten Sie eine Punktladung q, welche sich im Potential

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{Q(t)}{|\boldsymbol{r}|} = \sin(\alpha t)\,\frac{Q}{|\boldsymbol{r}|}$$

einer Punktladung befinde, deren Ladung mit der Periode $2\pi/\alpha$ zwischen Q und $-Q$ schwanke. Die Ladung q bewege sich dabei auf der Bahnkurve

$$\boldsymbol{r}(t) = vt\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \text{mit} \quad v = const.$$

Berechnen Sie die zeitliche Änderung $\mathrm{d}E_{pot}/\mathrm{d}t$ der potentiellen Energie $E_{pot} = q\,\phi(\boldsymbol{r},t)$. Beachten Sie hierbei, dass nicht nur die explizite Zeitabhängigkeit von $\phi(\boldsymbol{r},t)$ zu berücksichtigen ist, sondern auch die implizite Zeitabhängigkeit über $\boldsymbol{r}(t)$.

3) Berechnen Sie

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\ , \quad \nabla\,|\boldsymbol{r}|\ , \quad \nabla\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\ , \quad \nabla\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2}\ ,$$

wobei $\boldsymbol{a}$ ein konstanter Vektor ist.

4) Berechnen Sie

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} \quad \text{und} \quad \nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a})\,,$$

wobei $\boldsymbol{a}$ ein konstanter Vektor ist. Verwenden Sie hierbei das Levi-Civita Symbol ε_{ijk} zur Darstellung des Kreuzproduktes.

5) Beweisen Sie die Rechenregel

$$\nabla \cdot (\phi(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})) = \phi(\boldsymbol{r})\, \nabla \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})\, \nabla\phi(\boldsymbol{r})\,,$$

wobei $\phi(\boldsymbol{r})$ ein Skalarfeld und $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld ist.