Prof. Dr. M. Garcia
Anne Müller
Tobias Müller

Brückenkurs 2014

Aufgabenblatt 3

1) Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = (5, 4, 3)$ und $\vec{v} = (6, 2, -3)$. Berechnen Sie

$$|\vec{v}| \ , \quad 5\vec{u} - 2\vec{v} \ , \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \ , \quad \vec{u} \times \vec{v} \ .$$

2) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & -1 \\ 19 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -13 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie

$$A^\top \ , \quad A + B \ , \quad A - B \ , \quad 2A \ .$$

Geben Sie an, welche der folgenden Matrixprodukte definiert sind:

$$AB \, , \ A^\top B \, , \ AB^\top \ .$$

Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die Matrixprodukte, sofern sie definiert sind.

3) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie AB und BA. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

4) Beweisen Sie für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Regel

$$(AB)^\top = B^\top A^\top \ .$$

5) Geben Sie die Determinaten der folgenden Matrizen an.
Hinweis: Es sind keine aufwändigen Rechnungen notwendig!

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 8 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 4 & 7 \\ 8 & 0 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 9 & 0 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 8 & 8 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 9 & 5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

6) Zeigen Sie, dass für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} .$$

7) Zeigen Sie, das für Matrizen $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit C regulär gilt

$$\det(CAC^{-1}) = \det(A) .$$

8) Gegeben sei eine schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (d.h. $A^\top = -A$). Zeigen Sie, dass falls n ungerade ist $\det A = 0$ gilt.