Prof. Dr. M. Garcia
Anne Müller
Tobias Müller

Brückenkurs 2014

Aufgabenblatt 4

1) Berechnen sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie, sofern die Matrizen diagonalisierbar sind, die Transformationsmatrix C an, welche die jeweilige Matrix diagonalisiert.

2) Betrachten Sie eine Punktladung q, welche sich im Potential

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{Q(t)}{|\vec{r}|} = \sin(\alpha t)\,\frac{Q}{|\vec{r}|}$$

einer Punktladung befinde, deren Ladung mit der Periode $2\pi/\alpha$ zwischen Q und $-Q$ schwanke. Die Ladung q bewege sich dabei auf der Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = vt\,\vec{e}_x \quad \text{mit} \quad v = const.$$

Berechnen Sie die zeitliche Änderung $\mathrm{d}E_{pot}/\mathrm{d}t$ der potentiellen Energie $E_{pot} = q\,\phi(\vec{r}, t)$. Beachten Sie hierbei, dass nicht nur die explizite Zeitabhängigkeit von $\phi(\vec{r}, t)$ zu berücksichtigen ist, sondern auch die implizite Zeitabhängigkeit über $\vec{r}(t)$.

3)

i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen

$$f_1(x, y, z) = x\,y^5 + z \ , \quad f_2(x, y, z) = z\ln(x) .$$

Berechnen Sie

$$\partial^2_{x,y} f_1(x, y, z) \quad \text{und} \quad \partial^2_{y,x} f_1(x, y, z)$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse.

ii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Skalarfelder

$$\phi_1(\vec{r}) = |\vec{r}| \ , \quad \phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} \ , \quad \phi_3(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|^2} \quad \text{mit} \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

iii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen des Vektorfeldes

$$\vec{v}(\vec{r}) = \left(x\,y, x + z^2, y^2 - z\right) .$$

4) Berechnen Sie

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})\,,\quad \nabla\,|\vec{r}|\,,\quad \nabla\,\frac{1}{|\vec{r}|}\,,\quad \nabla\,\frac{1}{|\vec{r}|^2}\,,$$

wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist.

5) Sei Γ die geradlinige Verbindung der Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ im $\mathbb{R}^2$. Des Weiteren sei ein Skalarfeld $\phi(x,y) = x+y$ und ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = (x^2+y, 2y-x)$ gegeben. Berechnen Sie das Linienintegral 1. Art

$$\int_\Gamma \phi(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}\,,$$

sowie das Linienintegral 2. Art

$$\int_\Gamma \vec{v}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,,$$

wobei $\vec{r} = (x,y)$ der Ortsvektor im $\mathbb{R}^2$ ist.

6) Berechnen Sie für das Skalarfeld $\phi(x,y) = x+y$ das Integral

$$\int_A \phi(x,y)\,\mathrm{d}A$$

über den in der Abbildung dargestellten Halbkreis.
Hinweis: Verwenden Sie ebene Polarkoordinaten r,φ.