Übungen in *Statistische Physik*

Übungsblatt 1

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Dienstag, den 30.04.2019** in der Vorlesung ab.

1) 10 Punkte

In vielen speziellen Gruppen von Individuen (z. B. in einem Ensemble von Marathonläufern oder anderen Leistungssportlern) sind die Fluktuationen zwischen den Leistungen der allerbesten Individuen nur sehr gering. Ist dies eine Konsequenz von optimaler Leistungsauswahl?

i) Sei r eine Größe, die auf das Intervall $[0, 1]$ normiert ist und die die Leistung eines Sportlers misst (z. B. die Geschwindigkeit, mit der er 400 m läuft). Betrachten Sie nun eine Menge von n zufällig ausgewählten Sportlern. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Leistung r_i eines zufällig herausgegriffenen Sportlers $i \in \{1, \ldots, n\}$ im Intervall $[r, r + \mathrm{d}r]$ zu finden ist sei durch die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(r)$ gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $p(r)$ die Wahrscheinlichkeit $p_n(x)\,\mathrm{d}x$ dafür, dass der größte Wert der Menge $\{r_i\}$ der Leistungen aller Sportler im Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$ liegt. $p_n(x)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallszahl $x = \max\{r_i\}$. Verifizieren Sie, dass $p_n(x)$ für beliebige $p(r)$ normiert ist.

ii) Nehmen Sie an, dass r im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt ist. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit innerhalb einer Gruppe sehr langsame ($r = 0$) und sehr schnelle ($r = 1$) Läufer zu finden identisch ist. Berechnen Sie $\langle x \rangle$ und $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ als Funktion von n und analysieren Sie das Verhalten für große Werte von n. Skizzieren Sie $p_n(x)$ für repräsentative Werte von n (z. B. $1, 10, 100, \ldots$). Lässt sich damit die am Anfang gestellte Frage beantworten? Kommentieren Sie das kurz.

2) 15 Punkte

Betrachten Sie ein magnetisches Material, in dem jedes Atom ein magnetisches Moment mit dem Spin $s = 1/2$ trägt. Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit für $s_z = 1/2$ durch p_+ und für $s_z = -1/2$ durch $p_- = 1 - p_+$ gegeben ist. Zur Vereinfachung sei anzunehmen, dass Spins unterschiedlicher Atome unkorreliert sind.

i) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle s_z \rangle$ und die Varianz σ^2 der Zufallsvariable $s_z = \{1/2, -1/2\}$ des Spins eines Atoms als Funktion von p_+.

ii) Verallgemeinern Sie die Rechnung für ein Untersystem, das aus N Atomen besteht (z. B. N benachbarte Atome). Bestimmen Sie dazu die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass von k ($k = 0, 1, \ldots, N$) Atomen der Spin den Wert $s_z = 1/2$ und von $(N - k)$ Atomen der Spin den Wert $s_z = -1/2$ annimmt.

iii) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Gesamtmagnetisierung S_z des Untersystems als Funktion von k und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Gesamtmagnetisierung $P_N(S_z)$ des Untersystems für alle erlaubten Werte von S_z.

Zeigen Sie nun, dass der Mittelwert der Gesamtmagnetisierung durch $\langle S_z \rangle = N(p_+ - 1/2)$ gegeben ist. Macht dieses Resultat Sinn? Zeigen Sie weiterhin, dass die Varianz der Gesamtmagnetisierung durch $\sigma^2 = N p_+(1-p_+)$ gegeben ist und skizzieren Sie den Variationskoeffizienten $\sigma/\langle S_z \rangle$. Interpretieren Sie die Abhängigkeiten von σ^2 und $\sigma/\langle S_z \rangle$ als Funktion von N und p_+.

Hinweis: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} x^k\, y^{N-k} = x\,\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^N$$

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 \binom{N}{k} x^k\, y^{N-k} = x^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x+y)^N + x\,\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^N\,.$$

iv) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Gesamtmagnetisierung S_z mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes (ZGS).

Bonus: Vergleichen Sie diese Verteilung mit ihrer exakten Verteilung, die Sie im vorherigen Aufgabenteil ermittelt haben, für verschiedene Werte von N. Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten $P_N^{ZGS}(S_z)$ für alle diskreten Werte von $S_z = -N/2, -N/2+1, \ldots, N/2$ indem Sie $P_N^{ZGS}(S_z)$ in einem Intervall mit Breite 1 um den diskreten Wert von S_z integrieren. Machen Sie eine Zeichnung, um sich davon zu überzeugen, dass dies der richtige Weg ist.

Verifizieren Sie den ZGS und die Konvergenz zur exakten Wahrscheinlichkeitsverteilung für zunehmende Werte von N und unterschiedliche Werte für p_+.

3) *Brown'sche Bewegung:*

8 Punkte

Die Bewegung eines Teilchens in drei Dimensionen sei eine Reihe unabhängiger Schritte mit der Länge l.

i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\theta,\varphi)$ dafür, dass sich das Teilchen bei einem Schritt in die Richtung bewegt, die den Polarwinkel φ und den Azimutalwinkel θ hat. Nehmen Sie dabei an, dass sich das Teilchen in jede Richtung mit derselben Wahrscheinlichkeit bewegt.

ii) Berechnen sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle z \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$, $\langle xy \rangle$, $\langle xz \rangle$ und $\langle yz \rangle$.

iii) Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Wahrscheinlichkeit $p(X,Y,Z)$ dafür zu berechnen, dass sich das Teilchen nach den N Schritten am Punkt (X,Y,Z) befindet ($X = \sum_{i=1}^N x_i$, $Y = \sum_{i=1}^N y_i$, $Z = \sum_{i=1}^N z_i$). Nehmen Sie hierzu an, dass im relevanten Bereich, d. h. wenn $|X|$, $|Y|$ und $|Z|$ Werte in der Größenordnung von $l\sqrt{N}$ annehmen, die Variablen X, Y und Z unabhängig sind, so dass die Näherung $p(X,Y,Z) \simeq p_X(X)\,p_Y(Y)\,p_Z(Z)$ gerechtfertigt ist.

iv) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz um den quadratischen Mittelwert des Abstandes $d_N = \sqrt{\langle R^2 \rangle}$ nach N Schritten zu berechnen, wobei $R^2 = X^2+Y^2+Z^2$ gilt. Interpretieren Sie die N- und l-Abhängigkeit des Resultats kurz.

4) 15 Punkte

Eine Gruppe von Spielern hat herausgefunden, dass die Würfel in einem großen Casino im Mittel den Wert μ ($1 \leq \mu \leq 6$) anstatt dem a priori erwarteten Mittelwert 3.5 liefern. Diese Information können die Spieler ausnutzen um die Warhscheinlichkeitsverteilung $\{p_k, k = 1\ldots, 6\}$ für die Ergebnisse des Würfels zu bestimmen und somit Ihre Gewinne zu maximieren. Untersuchen Sie dieses Problem in Abhängigkeit von μ. Einige Ideen dazu finden Sie im Folgenden:

i) Bestimmen Sie die unvoreingenommene Wahrscheinlichkeitsverteilung p_k ($k = 1, \ldots, 6$), indem Sie die Entropie der Verteilung unter den gegebenen Bedingungen maximieren.

ii) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl des Lagrange-Multiplikators β gilt

$$p_k = \frac{\mathrm{e}^{-\beta k}}{Z} \,,$$

wobei Z die so genannte Zustandssumme ist und β folgende Gleichung löst

$$\mu = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \,.$$

Geben Sie den Ausdruck für $Z = Z(\beta)$ an.

iii) Zeigen Sie, dass $\partial^2 \ln Z/\partial\beta^2$ für endliche Werte von β positiv ist und schließen Sie daraus, dass es eine bijektive Abbildung zwischen μ und β gibt. Wann ist $\beta > 0$ bzw. wann ist $\beta < 0$?

iv) Skizzieren Sie $Z = Z(\beta)$ sowie die Lösung $\mu = \mu(\beta)$ und die Entropie $S = S(\beta)$ der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung als Funktion von β.

v) Fertigen Sie nun eine Skizze von μ und S als Funktion von $T = 1/\beta$ sowohl für den Fall $T > 0$ als auch für den Fall $T < 0$ an. T kann als Temperatur interpretiert werden. Zeigen Sie, dass für positive Temperaturen $\partial S/\partial T > 0$ gilt.

vi) Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch bzw. mathematisch, z. B., wann ist $S(\beta)$ maximal? Was bedeuteten bzw. entsprechen die Grenzfälle $\beta = 0$ ($T = \infty$) und $\beta = \pm\infty$ ($T = 0$)? Wie hängt T bzw. β von μ ab? Wie hängt die Entropie S von μ ab? Bitte begründen Sie Ihre Antworten kurz.