

## Übungen in *Statistische Physik*

### Übungsblatt 10

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Dienstag, den 02.07.2019** in der Vorlesung ab.

- 1) Ein reales Gas wird durch die folgende Hamiltonfunktion beschrieben

20 Punkte

$$H = \sum_i^N p_i^2/2m + W(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N),$$

wobei  $W(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  die Wechselwirkung zwischen den  $N$  Teilchen im Gas angibt. Die klassische Näherung zur kanonischen Zustandssumme lautet bekanntlich

$$Z_{cl} = \frac{1}{N!} \frac{1}{\lambda^{3N}} \int dx^{3N} e^{-\beta W(\vec{x})}$$

mit  $\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ . Die thermische De-Broglie-Wellenlänge ist

$$\lambda = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}} = \hbar \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}}.$$

- i) Finden Sie die Entropie  $S$  und drücken Sie diese in der Form

$$S = S_K + S_W$$

aus, wobei  $S_K$  der kinetische Anteil und  $S_W$  der Wechselwirkungsanteil ist ( $S_W = 0$  für  $W = 0$ ).

- ii) Überprüfen Sie, ob  $S$  eine extensive Größe ist und schreiben Sie eine kurze Begründung. Wie würde  $S$  aussehen, wenn man den Vorfaktor  $1/N!$  in  $Z_{cl}$  ignorieren würde? Wie wäre dann die Abhängigkeit von  $S$  als Funktion von  $N$  und der Dichte  $N/V$ ? Wäre dies konsistent mit den Grundlagen der statistischen Mechanik bzw. Thermodynamik?

- iii) Leiten Sie aus  $S$  die isochore spezifische Wärme her und zeigen Sie, dass sie die Form

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B + \frac{1}{k_B T^2} \Delta W^2$$

annimmt. Wodurch ist  $\Delta W^2$  gegeben? Was bedeutet  $\Delta W^2$  physikalisch/statistisch? Was für Folgen haben Wechselwirkungen auf die spezifische Wärme? Können Sie dies für attraktive und repulsive Wechselwirkungen interpretieren?

- iv) Erklären Sie, warum die Gleichung für  $C_V$  dem 3. Hauptsatz der Thermodynamik widerspricht. Geben Sie dazu eine passende Formulierung des Nernst-Theorems an.

- v) Warum scheidet die klassische Näherung bei  $T \rightarrow 0$ ? Geben Sie ein mathematisches Kriterium an und erklären Sie dessen Bedeutung physikalisch.

- vi) Zeigen Sie, dass in der klassischen Näherung die kinetische Energie und die Wechselwirkungsenergie statistisch unkorreliert sind, d.h.,

$$\langle H_0 W \rangle = \langle H_0 \rangle \langle W \rangle.$$

- vii) Nutzen Sie diese Gleichung, um das Resultat für  $C_V$  alternativ und mit weniger Mühe herzuleiten.

Hinweis:  $C_V = \partial E / \partial T|_V = \Delta H^2 / k_B T^2$ .

2)

20 Punkte

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas. Die Hamiltonfunktion lautet  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_i \mathbf{p}_i^2 / 2m$ , wobei  $\mathbf{p}_i$  der Impuls des  $i$ -ten Teilchens ist und  $m$  die Masse des Teilchens.

- i) Benutzen Sie die kanonische Zustandssumme

$$Z_c(T, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} \int d\mathbf{p}^{3N} d\mathbf{q}^{3N} e^{-\beta H(\mathbf{p}, \mathbf{q})},$$

um zu zeigen, dass die freie Energie die Form

$$F(T, V, N) = -Nk_B T \ln \left( \frac{e V}{N \lambda^3} \right).$$

hat, wobei  $\lambda = 2\pi\hbar / \sqrt{2\pi m k_B T}$ .

- ii) Zeigen Sie, dass die freie Energie extensiv ist, d.h.  $F(T, \alpha V, \alpha N) = \alpha F(T, V, N)$ .  
 iii) Beweisen Sie die folgenden thermodynamischen Eigenschaften:

$$p = \frac{Nk_B T}{V},$$

$$S = Nk_B \left[ \left( \ln \frac{eV}{N\lambda^3} \right) + \frac{3}{2} \right] = -\frac{F}{T} + \frac{3}{2} Nk_B,$$

$$E = F + TS = \frac{3}{2} Nk_B T,$$

$$H = E + pV = \frac{5}{2} Nk_B T,$$

$$C_V = \frac{3}{2} Nk_B,$$

$$C_p = \frac{5}{2} Nk_B,$$

$$\alpha = \frac{1}{T},$$

$$\kappa_T = \frac{1}{p}, \text{ und}$$

$$\kappa_S = \kappa_T \frac{C_V}{C_p} = \frac{3}{5p}.$$

iv) Zeigen Sie, dass für die großkanonische Zustandssumme

$$Z_{gc} = e^{zV/\lambda^3}$$

gilt, wobei  $z = e^{\beta\mu}$  die Fugazität ist.

v) Leiten Sie aus dem großkanonischen Potential  $\Phi = -k_B T \ln(Z_{gc})$  den Ausdruck für die mittlere Teilchenzahl her:

$$\langle N \rangle = zV/\lambda^3$$

vi) Benutzen Sie, dass  $\Phi = -pV$ , um die Zustandsgleichung

$$pV = N k_B T$$

des idealen Gases herzuleiten.