Übungen in *Statistische Physik*

Übungsblatt 11

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Dienstag, den 09.07.2019** in der Vorlesung ab.

1) 14 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir einen Zusammenhang zwischen dem Druck p und der Energiedichte E/V bei idealen Gasen herleiten. Hierzu betrachten wir im Folgenden nicht wechselwirkende quantenmechanische Teilchen, welche sich in einem Würfel mit Kantenlänge L befinden.

i) Bestimmen Sie die Wellenvektoren $\boldsymbol{k}$, welche die periodischen Randbedingungen erfüllen, sowie die Energien $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ der zugehörigen Einteilchenzustände. Achten Sie auf die Abhängigkeit von $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ als Funktion des Volumens $V = L^3$.

ii) Verwenden Sie die Relation $p = -(\partial\Phi/\partial V)_{T,\mu}$, welche aus dem Differential des großkanonischen Potentials Φ folgt, um zu zeigen, dass die Beziehung zwischen Druck und Energiedichte jedes aus nicht wechselwirkenden Teilchen bestehenden Gases durch

$$p = \frac{2}{3}\frac{E}{V} \tag{1}$$

gegeben ist. Schlussfolgern Sie, dass diese Relation sowohl für Fermionen als auch für Bosonen gültig ist.

iii) Gilt die Beziehung (1) auch für klassische Gase, welche mit Hilfe des korrekten Boltzmann Zählens beschrieben werden? Erwarten Sie dann, dass z. B. die Abhängigkeit des Drucks p als Funktion der Temperatur T für Fermionen, Bosonen oder klassische nicht wechselwirkende Gase identisch ist? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

iv) Zeigen Sie, dass man aus der Relation (1) für die Kompressiblität eines idealen Quantengases das klassische Resultat $\kappa_S = \frac{3}{5p}$ erhält. Gibt es weitere Relationen des klassischen idealen Gases, welche für das ideale Quantengas gültig bleiben?

2) 12 Punkte

Betrachten Sie ein ideales Quantengas, d. h., ein Gas aus identischen nicht wechselwirkenden Teilchen, deren Einteilchen Wellenfunktionen mit der Quantenzahl α vollständig festgelegt werden. Die Quantenzahl α kann z. B. der Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ einschließlich des Spins $[\alpha = (\boldsymbol{k}, \sigma)]$, die Molekülorbitale oder sonstige Einteilchen Wellenfunktionen im ungeordneten System bezeichnen. Wir nehmen zunächst an, dass die zugehörigen Einteilchen Energieniveaus ε_α *nicht* entartet sind.

i) Geben Sie das großkanonische Potential Φ sowie die mittlere Teilchenzahl N als Funktion der Temperatur T und des chemischen Potentials μ sowohl für Bosonen als auch für Fermionen an.

ii) Bestimmen Sie die mittlere Energie E, sowie die Entropie S für Bosonen und Fermionen. Drücken Sie die Entropie S durch die mittleren Besetzungszahlen $\langle n_\alpha \rangle$ aus. Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch.

iii) Verallgemeinern Sie Ihre Resultate für Φ und N für den Fall, dass die Energieniveaus ε_α alle g-fach entartet sind. Auf diese Weise ist es z. B. möglich den Spin S der Teilchen zu berücksichtigen (in diesem Fall gilt $g = 2S + 1$).

3)

12 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das großkanonische Potential des idealen Fermigases im Grenzfall geringer Teilchendichte bzw. hoher Temperaturen, d. h. $\lambda^3/v \to 0$, durch

$$\Phi = -k_\mathrm{B} T N \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{v} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2 \right)$$

gegeben ist. Verwenden Sie diesen Ausdruck um die Energie E, die Entropie S, die spezifische Wärme C_V sowie die kompressibilität κ_T des idealen Fermigases mit geringer Teilchendichte zu bestimmen.

4)

10 Punkte

Betrachten Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle \hat{n}_{\boldsymbol{k}} \rangle$ nichtwechselwirkender Fermionen im Einteilchen-Zustand $\boldsymbol{k}$ mit der Energie $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$

$$\langle \hat{n}_{\boldsymbol{k}} \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu)} + 1} .$$

i) Zeigen Sie, dass die Anzahl $\langle \hat{n}_{\boldsymbol{k}} \rangle$ der Fermionen in einem Zustand $\boldsymbol{k}$ mit der Energie $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \mu + \delta$ gleich der Anzahl $1 - \langle \hat{n}_{\boldsymbol{k}'} \rangle$ der fehlenden Fermionen in einem Zustand $\boldsymbol{k}'$ mit der Energie $\varepsilon_{\boldsymbol{k}'} = \mu - \delta$ ist für beliebige δ.

ii) Nehmen Sie an, dass die Einteilchenzustandsdichte in der Nähe der Fermi-Energie ε_F die Form $\rho(\varepsilon) \propto \varepsilon^\alpha$ hat. Nutzen Sie die Ergebnisse des letzten Aufgabenteils um zu zeigen, dass bei konstantem N das chemische Potential μ bei zunehmender Temperatur T zunimmt, abnimmt bzw. konstant bleibt, wenn $\alpha < 0$, $\alpha > 0$ bzw. $\alpha = 0$ ist.

iii) Zeigen Sie für das chemische Potential μ, dass $\partial\mu/\partial T = 0$ für $T \to 0$ ist. Verwenden Sie dazu eine passende thermodynamische Relation und das Nernst-Theorem.