Übungen in *Statistische Physik*

Übungsblatt 12

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Dienstag, den 16.07.2019** in der Vorlesung ab.

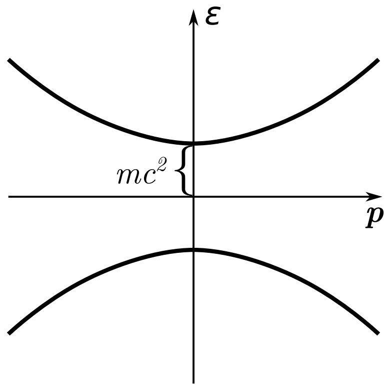
1) Dirac-Fermionen

15 Punkte

Dirac-Fermionen sind nicht-wechselwirkende Teilchen mit Spin 1/2, deren Einteilchen-Zustände positive und negative Energien

$$\varepsilon_\pm = \pm\sqrt{m^2\,c^4 + p^2\,c^2}$$

haben können. $\varepsilon_\pm$ hängt nicht vom Spin ab. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{p}$ den Impuls der Teilchen in drei Dimensionen, m die Ruhemasse der Teilchen und c die Lichtgeschwindigkeit.



i) Finden Sie das chemische Potential μ, sodass bei $T = 0$ alle Dirac-Zustände mit negativen Energien besetzt sind und alle Dirac-Zustände mit positiven Energien unbesetzt sind. Wie verhält sich das chemische Potential bei endlichen Temperaturen $T > 0$, wenn die (unendliche) Teilchenzahl N konstant bleibt? Begründen Sie Ihre Angaben.

Hinweise:

$$\lim_{T\to 0} \frac{\partial\mu}{\partial T}\bigg|_{V,N} = 0, \qquad f(\mu+\delta) = f(\mu-\delta)$$

ii) Finden Sie mit Hilfe des chemischen Potentials μ aus i) die auf die Grundzustandsenergie E_0 bezogene mittlere Energie $\Delta E(T)$

$$\Delta E(T) = E(T) - E(0)$$

für masselose Dirac-Fermionen ($m = 0$). $\Delta E(T)$ ist die Differenz der inneren Energie $E(T)$ des Systems und seiner Grundzustandsenergie $E_0 = E(T = 0)$.

iii) Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität C_V der masselosen Dirac-Fermionen.

2) Pauli-Suszeptibilität

15 Punkte

Die Leitungselektronen eines Metalls haben aufgrund ihres Spins ein magnetisches Moment $\mu_z = -2\, s_z\, \mu_\mathrm{B}$, wobei $\mu_\mathrm{B} = 5{,}8 \times 10^{-5}\mathrm{eV/T}$ ist. In einem äußeren Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ verschieben sich die Einteilchenenergien $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ je nach Spinausrichtung um $\Delta\varepsilon = \pm\mu_\mathrm{B} B$.

i) Zeigen Sie, dass für die Zustandsdichten der parallel ($\sigma = 1$) bzw. antiparallel ($\sigma = -1$) zum äußeren Feld ausgerichteten Spins

$$\rho_\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{2}\,\rho_0(\varepsilon - \sigma\,\mu_\mathrm{B}\,B)$$

gilt, wobei

$$\rho_0\,(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$$

die bereits bekannte Zustandsdichte des feldfreien Falls in drei Dimensionen kennzeichnet.

ii) Die Magnetisierung kann auf $M = \mu_\mathrm{B}\,(N_+ - N_-)$ zurückgeführt werden. N_+ und N_- ist dabei die Anzahl der Spins, die parallel bzw. antiparallel zum Magnetfeld ausgerichtet sind. Berechnen Sie den Beitrag der Leitungselektronen zur magnetischen Suszeptibilität:

$$\chi = \lim_{B\to 0}\frac{M}{B} = \lim_{B\to 0}\frac{\mu_\mathrm{B}\,(N_+ - N_-)}{B}\,.$$

Analysieren Sie das Resultat aus physikalischer Sicht: Wovon hängt χ bei $T \to 0$ ab? Welche Elektronen tragen zur magnetischen Suszeptibilität bei?

iii) Was können Sie über die Temperaturabhängigkeit von χ sagen? Wovon hängt sie ab? Ab welcher Temperatur ist sie signifikant?

Hinweis: Im zweiten Aufgabenteil treten bei der Berechnung von $N_\pm$ Integrale der Form

$$I = \int \rho(\varepsilon)\, f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$$

auf. Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Sommerfeld-Entwicklung zur Lösung dieser Integrale. Vernachlässigen Sie Korrekturterme mit einer höheren Ordnung als T^2.

3) Ein System von N nichtwechselwirkenden quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren der Frequenz ω befindet sich im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T. Die Oszillatoren sind als unterscheidbar zu betrachten (z.B., Atome, die um unterschiedliche Gleichgewichtspositionen schwingen).

15 Punkte

i) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_1 eines einzelnen harmonischen Oszillators und zeigen Sie, dass

$$Z_1 = \frac{1}{2\sinh\left(\hbar\omega/2k_BT\right)}$$

gilt. Berechnen Sie im Anschluss die mittlere Besetzungszahl $\langle\hat{n}\rangle$ als Funktion von T, wobei $\hat{n}$ der aus der Qauntenmechanik bekannte Teilchenzahloperator des Oszillators ist.

ii) Wie lautet die kanonische Zustandssumme Z_N für das System aus N Oszillatoren? Berechnen Sie für dieses System außerdem die innere Energie E. Drücken Sie E mit Hilfe der mittleren Besetungszahl $\langle\hat{n}\rangle$ eines einzelnen Oszillators aus.

iii) Geben Sie die freie Energie F, die Entropie S und die Wärmekapazität C_V des Systems aus N Oszillatoren an.

iv) Bestimmen Sie das Verhalten von E, S und C_V in den Grenzfällen hoher ($k_BT \gg \hbar\omega$) und niedriger ($k_BT \ll \hbar\omega$) Temperatur. Welcher dieser beiden Grenzfälle entspricht dem klassischen Limes?

4)

10 Punkte

Betrachten Sie Phononen in einem Festkörper mit N Atomen in einem Volumen $V = L^3$. Wenn wir die Phononen mit der linearen, isotropen Dispersionsrelation $\omega_k = c\,k$ beschreiben, dann ergibt sich für ihre Zustandsdichte ρ in drei Dimensionen der Ausdruck

$$\rho(\omega) = V\frac{3\,\omega^2}{2\,\pi^2\,c^3}\,.$$

Dabei steht c für die Schallgeschwindigkeit, ω für die Phononenkreisfrequenz und $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ für die Wellenzahl der Phononen.

i) Im Gegensatz zu den Photonen ist die Anzahl der Freiheitsgrade und der Schwingungsfrequenzen von N Atomen beschränkt. Deshalb gibt es eine obere Grenze ω_D (*Debye-Kreisfrequenz*) für die Phononenkreisfrequenz ω, die kein Phonon überschreiten kann. Zeigen Sie, dass die höchste Phononenfrequenz ω_D gegeben ist durch

$$\omega_D = c\left(\frac{6\pi^2}{v}\right)^{1/3}\,,$$

wobei $v = V/N$ gilt. Benutzen Sie dabei, dass die Gesamtanzahl der möglichen Schwingungsmoden $3\,N$ beträgt. Wie viele nicht verschwindende Schwingungsfrequenzen kann eigentlich ein System aus N Atomen haben?

ii) Nutzen Sie den bosonischen Charakter der Phononen aus und leiten Sie den Ausdruck für die Gesamtenergie

$$E = E_0 + \frac{3V}{2\pi^2c^3}\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\,\mathrm{d}\omega$$

her, wobei E_0 die Grundzustandsenergie ist. Wie groß ist E_0? Wovon hängt sie ab?

iii) Leiten Sie schließlich den Ausdruck

$$C_V = \begin{cases} 3Nk_\mathrm{B}\left(1 - \frac{1}{20}\left(\frac{T_D}{T}\right)^2 + \ldots\right), & T \gg T_D \\ \frac{12\pi^4}{5} N\,k_\mathrm{B}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 + \mathcal{O}(e^{-T_D/T}), & T \ll T_D \end{cases}$$

für die Wärmekapazität her, wobei $T_D = \hbar\,\omega_D/k_\mathrm{B}$ die *Debye-Temperatur* bezeichnet. Können Sie diese Grenzwerte physikalisch interpretieren bzw. mit anderen bekannten Resultaten verknüpfen oder vergleichen?

5) $\boxed{\text{10 Punkte}}$

Betrachten Sie nicht relativistische Bosonen mit der Ruhemasse m in beliebigen Dimensionen D ($\varepsilon_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2\,m}\sum_{\alpha=1}^{D} p_\alpha^2$). Für welche Werte von $D \in \mathbb{N}$ erwarten Sie eine Bose-Einstein-Kondensation mit kritischer Temperatur $T_c > 0$. Begründen Sie bitte Ihre Aussagen. Können Sie einen Ausdruck für T_c als Funktion von D angeben?