Übungen in *Statistische Physik*

Übungsblatt 6

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Dienstag, den 04.06.2019** in der Vorlesung ab.

1) 10 Punkte

Eine Stoffmenge A mit der Temperatur T_A und der Wärmekapazität C_A (bei konstantem Druck p) werde mit einer Stoffmenge B mit Temperatur T_B und der Wärmekapazität C_B in thermischen Kontakt gebraucht. Der Druck des aus den Stoffmengen A und B zusammengesetzten Gesamtsystems, d.h. insbesondere der Druck der beiden Teilsysteme, sei während des Prozesses konstant. Zusätzlich sei das Gesamtsystem gegenüber der Umgebung thermisch isoliert.

i) Zum Erreichen des Gleichgewichts müssen die Systeme Energie austauschen falls $T_A \neq T_B$. Argumentieren Sie mit Hilfe des 2. Hauptsatzes welches System Energie aufnimmt bzw. abgibt.

ii) Welches thermodynamische Potential ist geeignet, um den geschilderten Vorgang zu beschreiben?

iii) Bestimmen Sie die Temperatur T des Gleichgewichtszustandes.

iv) Berechnen Sie die Änderung der Entropie des Gesamtsystems bei dem geschilderten Prozess.

2) 15 Punkte

Laut Bekenstein und Hawking ist die Entropie S eines schwarzen Lochs proportional zu seiner Fläche A und gegeben durch

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A,$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c und der Gravitationskonstante G.

i) Berechnen Sie die Fluchtgeschwindigkeit in der Entfernung R von einem Körper mit der Masse M mit Hilfe der klassischen Mechanik. Finden Sie im Anschluss den Schwarzschild-Radius r_S eines schwarzen Lochs, indem Sie eine Beziehung zwischen dem Abstand R und der Masse M herstellen und als Fluchtgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit c annehmen.

ii) Bestimmen Sie die Änderung der Entropie ΔS, wenn zwei schwarze Löcher mit Masse M zu einem schwarzen Loch verschmelzen. Wie hoch ist die Änderung der Entropie des Universums, wenn zwei solare schwarze Löcher, d.h., zwei schwarze Löcher mit der Masse unserer Sonne ($M_S = 2 \times 10^{30}$kg), verschmelzen?

iii) Die interne Energie E eines schwarzen Lochs ist durch die Einstein-Gleichung $E = mc^2$ gegeben. Finden Sie die Temperatur T eines schwarzen Lochs in Abhängigkeit von seiner Masse M.

iv) Ein schwarzes Loch emittiert thermische Strahlung. Dies lässt sich versinnbildlicht folgendermaßen erklären: Das (Quanten-) Vakuum durchlebt andauernde Fluktuationen in denen Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt und vernichtet werden. In der Nähe des Ereignishorizontes eines schwarzen Lochs kann es vorkommen, dass eines der Teilchen in das schwarze Loch fällt, während das andere Teilchen entkommt. Aufgrund der Energieerhaltung muss das ins schwarze Loch fallende Teilchen eine negative Energie tragen, wodurch die Energie E und somit die Masse M des schwarzen Lochs abnimmt. Die Abnahme der Energie E eines schwarzen Lochs mit Oberfläche A bei der Temperatur T ist dann gegeben durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sigma A T^4 \text{ mit } \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}.$$

Berechnen Sie die Zeit bis ein schwarzes Loch vollständig verstrahlt ist. Wie lang dauert dieser Prozess für ein schwarzes Loch mit der Masse unserer Sonne?

v) Bestimmen Sie die Masse M eines schwarzen Lochs, das im thermischen Gleichgewicht mit der gegenwertigen kosmischen Hintergrundstrahlung steht ($T = 2.7$ K).

3) $\boxed{\text{7 Punkte}}$

Ein System aus N Teilchen befinde sich bei der Temperatur T im Volumen V. $Z(T, V, N)$ sei die kanonische Zustandssumme des Systems. Zeigen Sie die folgende Relation:

$$N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial N} \right)_{T,V} + V \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{T,N} = \ln Z.$$

4) $\boxed{\text{8 Punkte}}$

Betrachten Sie ein System A, welches an ein viel größeres System (das sogenannte Bad B) gekoppelt ist. Es sollen S_A, E_A und N_A die Entropie, Energie und die Teilchenzahl des Systems A bezeichnen, während S_B, E_B und N_B die entsprechenden Größen des Bades B sind. Zusätzlich bezeichnen T_B und μ_B die Temperatur und das chemische Potential des Bades B. Für alle in der Natur von selbst ablaufenden Prozesse gilt, dass die Entropie des gesamten (isolierten) Systems $S \oplus B$ nicht abnimmt, d.h. alle infinitesimalen Änderungen der Gesamtentropie $S = S_A + S_B$ erfüllen $dS \geq 0$.

i) Nehmen Sie zunächst an, dass nur der Austausch von Energie zwischen A und B möglich sei. Dabei soll natürlich die Gesamtenergie $E = E_A + E_B$ für jeden Energieaustausch erhalten bleiben, d.h., $dE = 0$. Zeigen Sie, dass dann für alle Änderungen des Potentials $F_A = E_A - T_B S_A$ die Beziehung $dF_A \leq 0$ gilt.

ii) Wiederholen Sie den vorigen Aufgabenteil für den Fall, dass neben dem Energieaustausch auch ein Teilchenaustausch möglich ist. Bei jedem Austausch soll sowohl die Gesamtenergie E als auch die gesamte Teilchenzahl $N = N_A + N_B$ erhalten bleiben, d.h., $dE = 0$ und $dN = 0$. Zeigen Sie, dass für alle Änderungen des Potentials $\Phi_A = E_A - T_B S_A - \mu_B N_A$ die Ungleichung $d\Phi_A \leq 0$ gilt.

iii) Zeigen Sie, dass das Potential F_A im thermischen Gleichgewicht tatsächlich die bekannte Relationen

$$F_A = -k_B T_B \ln Z$$

erfüllt. Hier bezeichen Z die kanonische Zustandssumme des Systems A. Verwenden Sie zu diesem Zweck die Formulierung

$$F_A = \langle \hat{H} \rangle_A + k_B T_B \langle \ln \hat{\rho}_A \rangle_A$$

und führen Sie die thermischen Mittelwerte im Gleichgewicht mittels des kanonischen Dichteoperators $\hat{\rho}_A$ des Systems A durch.