Übungen in *Statistische Physik*

Übungsblatt 9

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Dienstag, den 25.06.2019** in der Vorlesung ab.

1)

10 Punkte

Betrachten Sie einen entarteten Energiezustand mit der Entartung g, welcher von n Teilchen ($0 \leq n \leq g$) besetzt wird. Berechnen Sie die Anzahl an möglichen Quantenzuständen $\Omega_g(n)$ für i) identische Fermionen, ii) identische Bosonen und iii) unterscheidbare Teilchen unter der Berücksichtigung des "korrekten Boltzmann-Zählens". Gibt es Fälle bzw. Grenzfälle, in welchen $\Omega_g(n)$ identisch ist für alle Situationen? Interpretieren Sie dies physikalisch.

Wiederholen Sie die Aufgabe, d. h., die Berechnung der Anzahl der möglichen Zustände Ω, für den Fall, dass es mehrere verschiedene Gruppen i von Energiezuständen gibt mit der Entartung g_i, die von jeweils n_i Teilchen besetzt werden ($\sum_i n_i = N$). Drücken Sie $S = \ln(\Omega)$ als Funktion der mittleren Besetzungszahl $\nu_i = n_i/g_i$ und dem Entartungsgrad g_i des i-ten Zustands aus. Analysieren Sie die interessanten Grenzfälle für Fermionen, Bosonen und Boltzmann-Teilchen. Wann sind die Resultate gleich? Interpretieren Sie die Resultate physikalisch.

Hinweis: "Korrektes Boltzmann-Zählen" bedeutet, die Teilchen als unterscheidbar (wie in der klassischen Mechanik) zu betrachten und das Resultat für Ω durch $N!$ zu teilen.

2)

10 Punkte

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hat{h}(x_i)$$

N nicht-wechselwirkender identischer Teilchen (z. B. $\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hat{p}_i^2/2m$). Beachten Sie, dass $\hat{h}(x)$ die gleiche Form für alle Teilchen hat, da die Teilchen identisch sind. Seien nun $\varphi_\alpha(x)$ mit $\alpha = 1, 2, \ldots$ die Eigenfunktionen von $\hat{h}$, d. h., $\hat{h}\,\varphi_\alpha(x) = \varepsilon_\alpha\,\varphi_\alpha(x)$. Zeigen Sie, dass jedes einfache Produkt der Form

$$\Psi(x_1, \ldots, x_N) = \varphi_{k_1}(x_1)\,\varphi_{k_2}(x_2)\cdots\varphi_{k_N}(x_N)$$

eine Eigenfunktion von $\hat{H}$ mit der Eigenenergie $E = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{k_i}$ ist. Ist $\Psi(x_1, \ldots, x_N)$ eine sinnvolle Eigenfunktion in bestimmen Fällen? Erklären Sie kurz wann dies der Fall ist und wann nicht. Zeigen Sie, dass die vollständig symmetrisierten und antisymmetrisierten Funktionen $\Psi_\pm(x_1, \ldots, x_N)$, die man aus Ψ erhält, entweder Null oder Eigenfunktionen von $\hat{H}$ mit der gleichen Energie E sind. Schlussfolgern Sie, dass

$$\hat{H}|n_1, n_2, \ldots n_\infty\rangle = \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} n_\alpha\,\varepsilon_\alpha\right)|n_1, n_2, \ldots n_\infty\rangle$$

gilt, wobei $|n_1, n_2, \ldots, n_\infty\rangle$ das Ket bzw. der Zustand mit den Besetzungszahlen n_α für die Orbitale $\varphi_\alpha(x)$ ist, d.h., $\langle x_1, x_2, \ldots, x_N | n_1, n_2, \ldots, n_\infty\rangle = \Psi_\pm(x_1, \ldots, x_N)$.

3)

10 Punkte

Betrachten Sie eine Zweiteilchen-Wellenfunktion, in der die Orbitale $\varphi_a(x)$ und $\varphi_b(x)$ besetzt sind, wobei $\langle\varphi_a|\varphi_b\rangle = 0$ und $\langle\varphi_a|\varphi_a\rangle = \langle\varphi_b|\varphi_b\rangle = 1$ gilt. Konstruieren Sie die zugehörigen fermionischen (^{3}He) und bosonischen (^{4}He) Wellenfunktionen $\Phi_\pm(x_1, x_2)$. In dieser Aufgabe wollen wir den Spin der Teilchen, abgesehen von der Tatsache, dass er den Teilchen ihren bosoinschen bzw. fermionischen Charakter verleiht, nicht weiter berücksichtigen. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Punkt x zu finden gegeben ist durch

$$p_1(x) = \frac{1}{2}\left(|\varphi_a(x)|^2 + |\varphi_b(x)|^2\right) .$$

Interpretieren Sie das Resultat in wenigen Worten. Wieso kommt es zu keinen Unterschieden zwischen bosonischen und fermionischen Zuständen? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_2(x, x')$ ein Teilchen am Punkt x und das andere Teilchen am Punkt x' zu finden. Vergleichen Sie $p_2(x, x')$ mit der unkorrelierten (klassischen) Wahrscheinlichkeit

$$p_{\mathrm{kl}}(x, x') = \frac{1}{2}\left(|\varphi_a(x)|^2\,|\varphi_b(x')|^2 + |\varphi_a(x')|^2\,|\varphi_b(x)|^2\right) .$$

Betrachten Sie insbesondere den Fall $x = x'$. Können Sie Schlussfolgerungen aus diesem Resultat ziehen? Verhalten sich die bosonischen (fermionischen) Korrelationen eher attraktiv oder repulsiv im Vergleich zur klassischen Näherung?

4)

15 Punkte

Ein System von N nichtwechselwirkenden quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren der Frequenz ω befindet sich im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T. Die Oszillatoren sind als unterscheidbar zu betrachten (z. B. Atome, die um unterschiedliche Gleichgewichtspositionen schwingen).

i) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_1 eines einzelnen harmonischen Oszillators und zeigen Sie, dass

$$Z_1 = \frac{1}{2\sinh\left(\hbar\omega/2k_BT\right)}$$

gilt. Berechnen Sie im Anschluss die mittlere Besetzungszahl $\langle\hat{n}\rangle$, wobei $\hat{n}$ der Teilchenzahloperator des Oszillators ist.

ii) Wie lautet die kanonische Zustandssumme Z_N für das System aus N Oszillatoren? Berechnen Sie für dieses System außerdem die innere Energie E. Drücken Sie E mit Hilfe der mittleren Besetungszahl $\langle\hat{n}\rangle$ eines einzelnen Oszillators aus.

iii) Geben Sie die freie Energie F, die Entropie S und die Wärmekapazität C_V des Systems aus N Oszillatoren an.

iv) Bestimmen Sie das Verhalten von E, S und C_V in den beiden Grenzfällen hoher ($k_\mathrm{B}T \gg \hbar\omega$) und niedriger ($k_\mathrm{B}T \ll \hbar\omega$) Temperatur. Welcher dieser beiden Grenzfälle entspricht dem klassischen Limes?