Übungen in *Statistische Physik*

Präsenzübung

Freitag, 26.04.2019

1) Ein metastabiler Atomkern zerfällt unter Emission von β-Strahlung. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\varphi, \theta)$, so dass die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Elektrons mit polarem Winkel im Intervall $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$ und azimutalem Winkel im Intervall $[\varphi, \varphi + \mathrm{d}\varphi]$ durch $p(\varphi, \theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ gegeben ist. Stellen Sie sich dazu vor, dass der Atomkern im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

2) In vielen speziellen Gruppen von Individuen (z. B. in einem Ensemble von Marathonläufern oder anderen Leistungssportlern) sind die Fluktuationen zwischen den Leistungen der allerbesten Individuen nur sehr gering. Ist dies eine Konsequenz von optimaler Leistungsauswahl?

i) Sei r eine Größe, die auf das Intervall $[0, 1]$ normiert ist und die die Leistung eines Sportlers misst (z. B. die Geschwindigkeit, mit der er 400 m läuft). Betrachten Sie nun eine Menge von n zufällig ausgewählten Sportlern. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Leistung r_i eines zufällig herausgegriffenen Sportlers $i \in \{1, \ldots, n\}$ im Intervall $[r, r + \mathrm{d}r]$ zu finden ist sei durch die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(r)$ gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $p(r)$ die Wahrscheinlichkeit $p_n(x)\,\mathrm{d}x$ dafür, dass der größte Wert der Menge $\{r_i\}$ der Leistungen aller Sportler im Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$ liegt. $p_n(x)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallszahl $x = \max\{r_i\}$. Verifizieren Sie, dass $p_n(x)$ für beliebige $p(r)$ normiert ist.

ii) Nehmen Sie an, dass r im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt ist. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit innerhalb einer Gruppe sehr langsame ($r = 0$) und sehr schnelle ($r = 1$) Läufer zu finden identisch ist. Berechnen Sie $\langle x \rangle$ und $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ als Funktion von n und analysieren Sie das Verhalten für große Werte von n. Skizzieren Sie $p_n(x)$ für repräsentative Werte von n (z. B. $1, 10, 100, \ldots$). Lässt sich damit die am Anfang gestellte Frage beantworten? Kommentieren Sie das kurz.

3) Betrachten Sie ein magnetisches Material, in dem jedes Atom ein magnetisches Moment mit dem Spin $s = 1/2$ trägt. Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit für $s_z = 1/2$ durch p_+ und für $s_z = -1/2$ durch $p_- = 1 - p_+$ gegeben ist. Zur Vereinfachung sei anzunehmen, dass Spins unterschiedlicher Atome unkorreliert sind.

i) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle s_z \rangle$ und die Varianz σ^2 der Zufallsvariable $s_z = \{1/2, -1/2\}$ des Spins eines Atoms als Funktion von p_+.

ii) Verallgemeinern Sie die Rechnung für ein Untersystem, das aus N Atomen besteht (z. B. N benachbarte Atome). Bestimmen Sie dazu die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass von k ($k = 0, 1, \ldots, N$) Atomen der Spin den Wert $s_z = 1/2$ und von $(N - k)$ Atomen der Spin den Wert $s_z = -1/2$ annimmt.

iii) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Gesamtmagnetisierung S_z des Untersystems als Funktion von k und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Gesamtmagnetisierung $P_N(S_z)$ des Untersystems für alle erlaubten Werte von S_z.
Zeigen Sie nun, dass der Mittelwert der Gesamtmagnetisierung durch $\langle S_z \rangle = N(p_+ - 1/2)$ gegeben ist. Macht dieses Resultat Sinn? Zeigen Sie weiterhin, dass die Varianz der Gesamtmagnetisierung durch $\sigma^2 = N p_+ (1 - p_+)$ gegeben ist und skizzieren Sie den Variationskoeffizienten $\sigma / \langle S_z \rangle$. Interpretieren Sie die Abhängigkeiten von σ^2 und $\sigma / \langle S_z \rangle$ als Funktion von N und p_+.
Hinweis: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} x^k \, y^{N-k} = x \, \frac{\partial}{\partial x} (x + y)^N$$

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 \binom{N}{k} x^k \, y^{N-k} = x^2 \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x + y)^N + x \, \frac{\partial}{\partial x} (x + y)^N \, .$$

iv) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Gesamtmagnetisierung S_z mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes (ZGS). Vergleichen Sie diese Verteilung mit ihrer exakten Verteilung, die Sie im vorherigen Aufgabenteil ermittelt haben, für verschiedene Werte von N.
Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten $P_N^{ZGS}(S_z)$ für alle diskreten Werte von $S_z = -N/2, -N/2 + 1, \ldots, N/2$ indem Sie $P_N^{ZGS}(S_z)$ in einem Intervall mit Breite 1 um den diskreten Wert von S_z integrieren. Machen Sie eine Zeichnung, um sich davon zu überzeugen, dass dies der richtige Weg ist.
Verifizieren Sie den ZGS und die Konvergenz zur exakten Wahrscheinlichkeitsverteilung für zunehmende Werte von N und unterschiedliche Werte für p_+.

4) Ein Würfel ist so gezinkt, dass $p_6 = n \, p_1$ gilt (z. B. $n = 2$). Die 6 tritt also n-mal häufiger auf als die 1.

i) Finden Sie die Wahrscheinlichkeiten für die sechs möglichen Ergebnisse eines Wurfs unter der Annahme, dass der Informationsgehalt der Wahrscheinlichkeitsverteilung minimal ist, d. h., dass die Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung maximal wird.

ii) Bestimmen Sie die Entropie S der im vorherigen Aufgabenteil gewonnenen Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i mit $i = 1, \ldots, 6$ als Funktion von $n \gg 1$ mit $n \in \mathbb{R}$. Skizzieren oder plotten Sie $S(n)$ und interpretieren Sie in wenigen Worten die n-Abhängigkeit.