Arbeit, Energie, Impuls und Erhaltungssätze

Die Einführung von physikalischen Größen, für die ein Erhaltungssatz gilt, liefert sehr leistungsfähige Strategien zur Berechnung von physikalischen Vorgängen.

In der klassischen Mechanik ist die Gesamtmasse eines abgeschlossenen Systems erhalten.

Für die anderen bisher verwendeten Größen (Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft) gilt kein Erhaltungssatz.

Es werden daher zusätzliche Größen (Energie, Impuls) definiert, für die ein Erhaltungssatz gilt. Die Erhaltung dieser Größen in abgeschlossenen Systemen kann aus Newtons Axiomen im mathematischen Sinne bewiesen werden.

Arbeit

Wir definieren

$$W = \int_{\text{Kurve}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Die Arbeit ist eine skalare Größe. Sie kann positiv und negativ sein. Wenn $\vec{F}$ die Kraft ist, die auf den Körper A einwirkt und von Körper B ausgeht, dann verricht der Körper B die Arbeit *W* am Körper A. Wenn die Kraft auf Körper A von einem Feld ausgeht, dann verrichtet das Feld die Arbeit am Körper A.

Spezialfall: Ist die Kraft ortsunabhängig und verläuft der Weg gradlinig, dann gilt vereinfacht

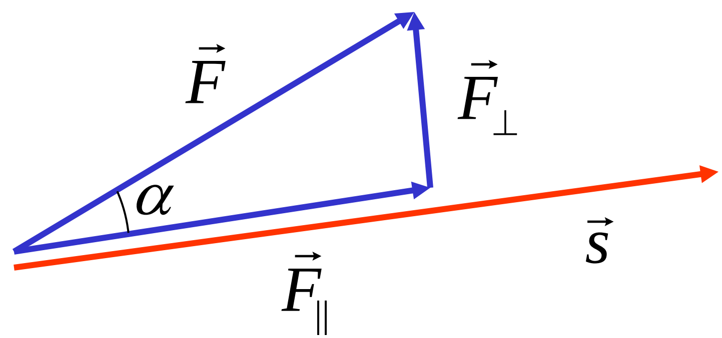
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Arbeit = Kraft * Weg

Die Arbeit ist eine skalare Größe. Sie wird aus zwei Vektoren mit Hilfe des *Skalarproduktes* berechnet.

Das Skalarprodukt ist eine im Vektorraum definierte Operation.
Das Skalarprodukt berücksichtigt nur die Komponente des einen Vektors, die in die Richtung des anderen Vektors zeigt, multipliziert mit dem Betrag des anderen Vektors.

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}_{\parallel}\right| \left|\vec{s}\right|$$



$\vec{F}_{\perp}$ trägt nicht zur Arbeit bei.

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{s}\right| \cos\alpha$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = (F_x, F_y, F_z) \cdot (s_x, s_y, s_z) = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$$

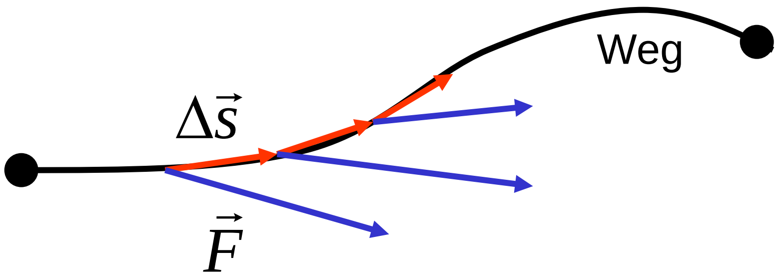
Allgemeiner Fall:

Ortsabhängige Kräfte, krummlinige Verschiebung in einem Kraftfeld

Die Verschiebung muss in kleine Stücke zerlegt werden.

Die Arbeit wird für jedes Stück berechnet und aufsummiert.

$$W = \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$



Grenzübergang zu $\Delta s \to 0$ liefert

$$W = \int_{\text{Kurve}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Spezialfall:

Zeigt die Kraft entlang des gesamten Weges in Richtung des Weges und ist ortsunabhängig, dann gilt vereinfacht

$$W = F\,s$$

Arbeit = Betrag der Kraft * Länge des Weges

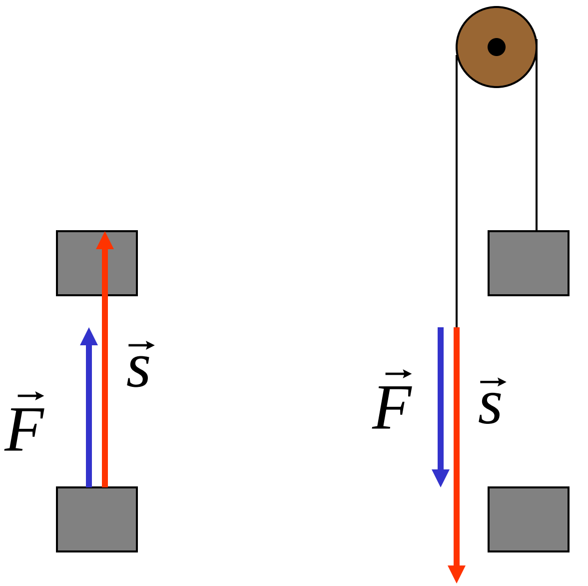
Zusammenhang der physikalischen Arbeit mit dem Alltagsbegriff „Arbeit“.

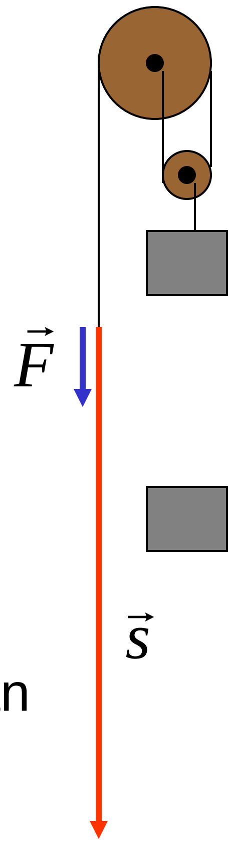
Physische Anstrengung wird als mechanische Arbeit empfunden. Muskeln verbrennen Nährstoffe (Umsatz von ADP), wenn sie angespannt werden. Da ADP auch verbraucht wird, wenn der Muskel angespannt ist, ohne seine Länge zu ändern, empfinden wir auch statische Muskelkräfte als anstrengend, obwohl keine physikalische Arbeit verrichtet wird.

Beispiel:
Anheben einer Masse gegen die Gravitationskraft verrichtet physikalische Arbeit.

Halten einer Masse mit Muskelkraft gegen die Gravitationskraft verrichtet keine physikalische Arbeit, ist aber trotzdem anstrengend. Der Muskel setzt dabei Nährstoffe um, ohne mechanische Arbeit im physikalischen Sinne zu verrichten.

Zum Anheben einer Masse hat man viele Möglichkeiten: z.B. Flaschenzug.

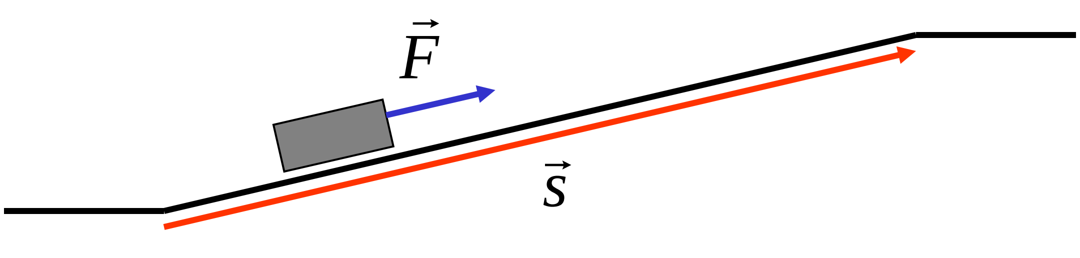


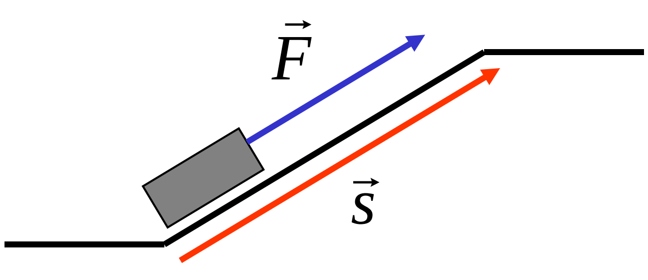


Versuch: Flaschenzug

Will man die Kraft verkleinern, muss man einen größeren Weg in Kauf nehmen.

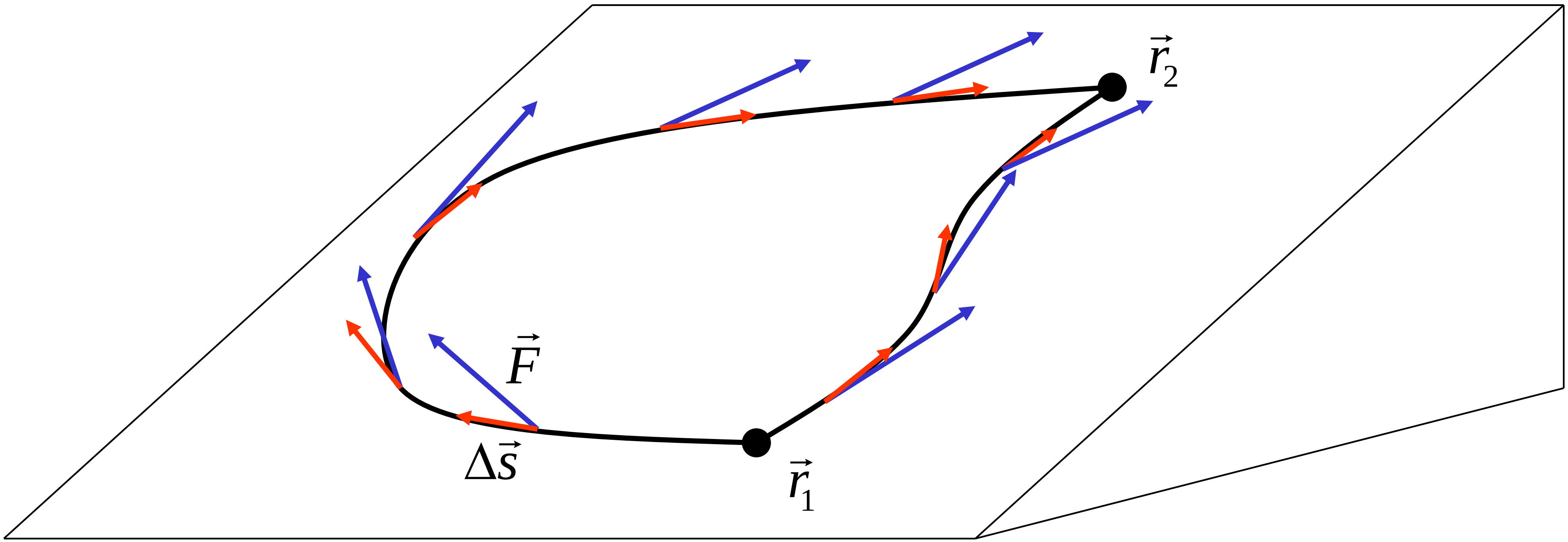
Beispiel 2: schräge Luftkissenschiene:





Wegabhängigkeit der Arbeit

Beispiel: schiefe Ebene mit Reibung

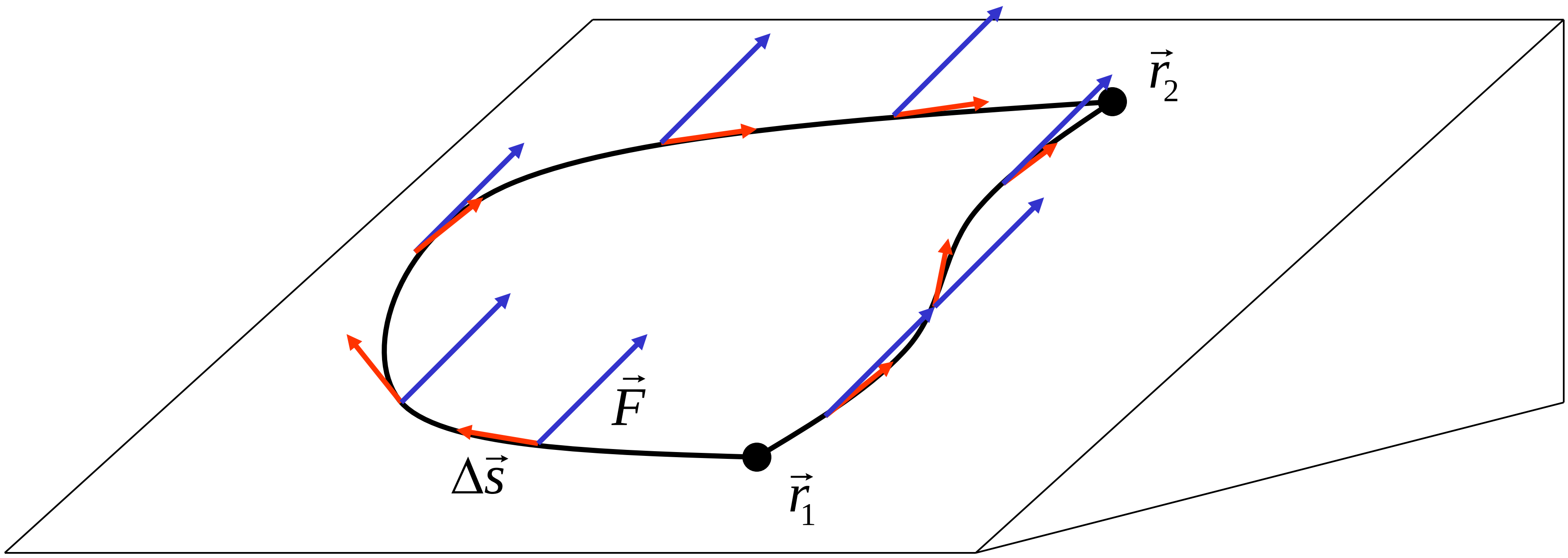


Die verrichtete Arbeit ist für jeden eingeschlagenen Weg zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ unterschiedlich.

In diesem Fall hilft die physikalische Arbeit nicht weiter, um einen Erhaltungssatz mit mechanischen Größen zu formulieren. (Es müsste die Reibungswärme mit einbezogen werden).

Konservatives Kraftfeld

Beispiel: schiefe Ebene ohne Reibung (konstante Kraft)



Wenn die verrichtete Arbeit unabhängig vom Verlauf des Weges zwischen zwei beliebigen Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ist, nennt man das Kraftfeld *konservativ*.

Hier zählt nur die Aufwärtskomponente des Weges, d.h. die Komponente der Verschiebung in Richtung der Kraft.

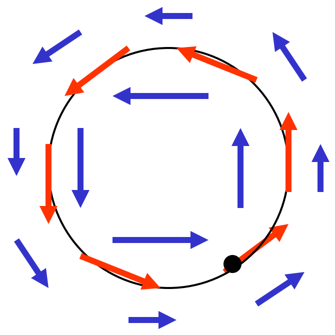
Äquivalente Definition:

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn die verrichtete Arbeit entlang jeder geschlossenen Kurve gleich Null ist.

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

Anschaulich ist auch folgende äquivalente Formulierung:

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn in jedem Punkt die Wirbelstärke gleich Null ist.



Die Wirbelstärke wird mit dem Operator $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ berechnet.

In einem Wirbelfeld wird auf einer geschlossenen Bahn Arbeit verrichtet.

Aus dem Gravitationsgesetz lässt sich herleiten, dass das Gravitationsfeld ein konservatives Kraftfeld ist.

Potentielle Energie

Voraussetzung: konservatives Kraftfeld. Die verrichtete Arbeit hängt nur von Startpunkt $\vec{r}_1$ und Endpunkt $\vec{r}_2$ ab, nicht vom Wegverlauf dazwischen.

Die Arbeit, die man am Körper verrichten muss, um ihn vom Startpunkt zum Endpunkt gegen die Kraft des Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ zu verschieben ist gegeben durch

$$W = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Hierbei ist die Kraft $-\vec{F}(\vec{r})$ relevant, die notwendig ist, um die Kraft des Feldes $\vec{F}(\vec{r})$ zu kompensieren, sodass eine Verschiebung und keine Beschleunigung erfolgt.

Ziel ist es nun, dem Körper an jedem Raumpunkt eine potentielle Energie zuzuordnen. Dazu ist die Wahl eines Nullpunktes notwendig. Die potentielle Energie an einem Referenzpunkt wird dazu auf Null festgelegt.

Wählt man den Startpunkt als Referenzpunkt, kann man jedem Ort eine *potentielle Energie* zuordnen. Wir definieren:

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{\mathrm{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Befindet sich der Körper am Ort $\vec{r}$ dann kann das Feld auf dem Weg von $\vec{r}$ zurück zum Referenzpunkt die Arbeit

$$W = E_{\mathrm{pot}}(\vec{r})$$

am Körper verrichten (Beachte Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ und Rückweg $-\mathrm{d}\vec{s}$).

Auf einem beliebigen Weg von $\vec{r}_2$ nach $\vec{r}_1$ verrichtet das Feld am Körper die Arbeit

$$W = E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_2) - E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_1)$$

Praktische Berechnung von Wegintegralen

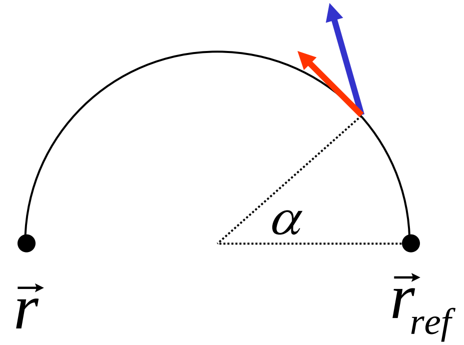
Der Weg wird parametrisiert. Dabei wird oft ein Parameter verwendet, der keine physikalische Bedeutung hat ξ. Es kann aber auch eine physikalische Größe sein (z.B. die Zeit, ein Winkel, etc.)

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\int_{\xi_1}^{\xi_2} \vec{F}(\xi) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$\vec{r}\,'$ ist der Ortsvektor auf dem Weg bei ξ

Beispiel: halbkreisförmiger Weg mit Winkel α als Parameter

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\int_{0}^{\pi} \vec{F}(\alpha) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$



Potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Punktmasse

(Ort der felderzeugenden Masse am Nullpunkt des Koordinatensystems)

$$\vec{F}_{\mathrm{G}}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Potentielle Energie bzgl. Referenzpunkt im Unendlichen

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_\infty}^{\vec{r}} \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r}\,'}{r'} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Wahl eines bestimmten Weges: direkter Weg entlang des Radiusvektors.

Als Parameter für den Weg verwenden wir den Abstand vom Ursprung r'

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = \int_{\infty}^{r} \left(\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r}\,'}{r'} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}r'} \mathrm{d}r'$$

mit

$$\vec{r}\,' \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}r'} = \vec{r}\,' \cdot \vec{e}_r = r'$$

folgt

$$E_{\text{pot}}(r) = \int_{\infty}^{r} \left(\gamma \frac{m_1 \, m_2}{r'^2} \right) \mathrm{d}r'$$

Man erhält:

$$E_{\text{pot}}(r) = \gamma \, m_1 \, m_2 \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2} \, \mathrm{d}r'$$

$$E_{\text{pot}}(r) = \gamma \, m_1 \, m_2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r}$$

$$E_{\text{pot}}(r) = -\gamma \, m_1 \, m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right)$$

Ergebnis: Potentielle Energie im Gravitationsfeld:

$$\boxed{E_{\text{pot}}(r) = -\gamma \frac{m_1 \, m_2}{r}}$$

Potenzial:

Die potentielle Energie ist immer auf einen bestimmten Körper bezogen.

Um die Eigenschaften des Körpers von den Eigenschaften des Feldes zu trennen, führen wir das *Potenzial* ein. Wir definieren das Gravitationspotenzial:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{\mathrm{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Mit der Gravitationsfeldstärke $\vec{g}(\vec{r})$

Das Gesamtpotenzial von mehreren Einzelmassen ist die Summe der Einzelpotenziale $\rightarrow$ Superpositionsprinzip

Aus dem Potenzial kann man die potentielle Energie eines Körpers in dem Feld leicht berechen

$$E_{pot}(\vec{r}) = m\varphi(\vec{r})$$

denn

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{\text{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\vec{r}_{\text{Ref}}}^{\vec{r}} m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = m\varphi(\vec{r})$$

Potentielle Energie und Potenzial haben den Vorteil, dass sie skalare Gössen sind. Das Potenzial ist sozusagen ein skalares Feld

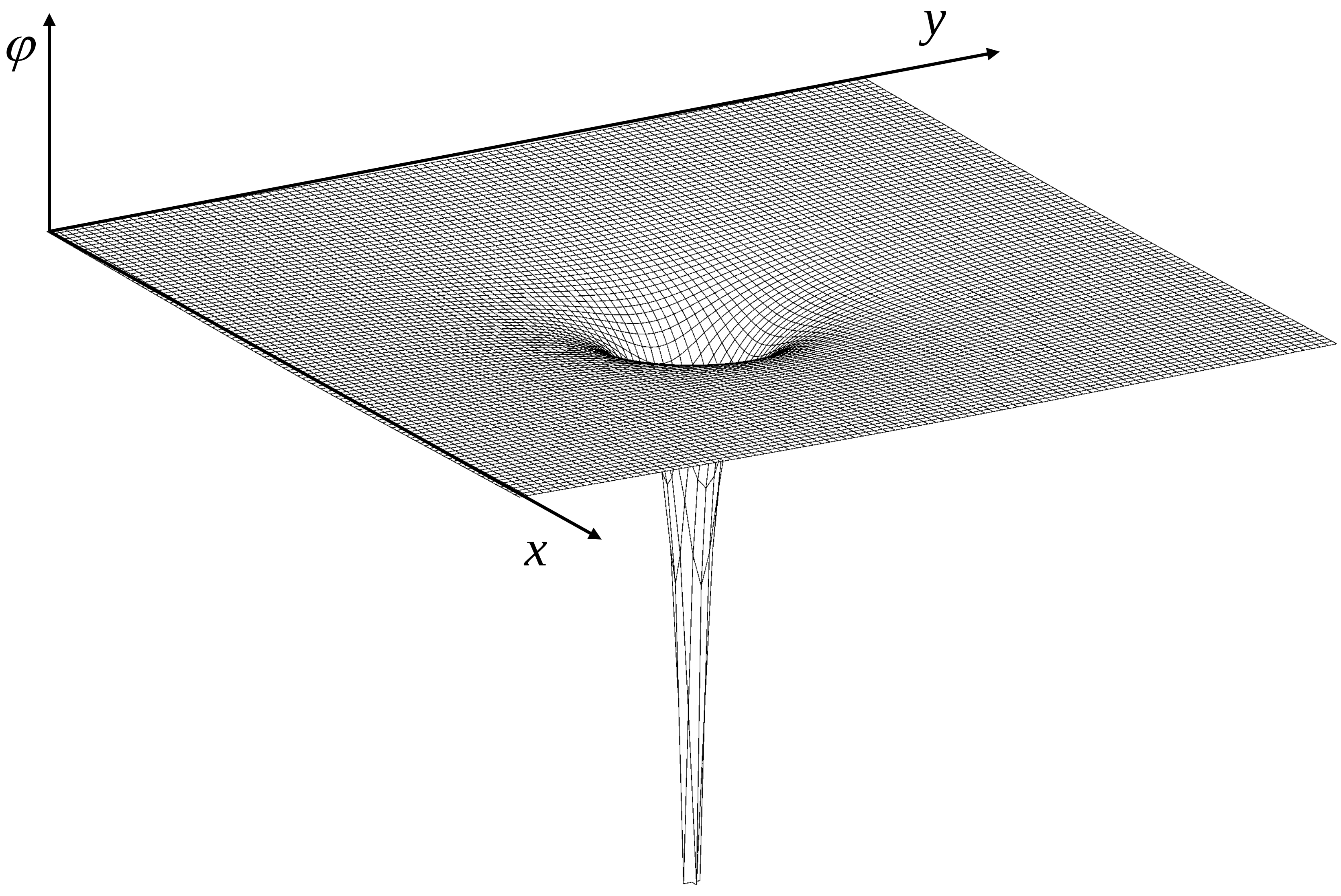
$$\varphi(x, y, z)$$

Trotzdem kann man die Feldstärke wieder aus ihnen berechnen.

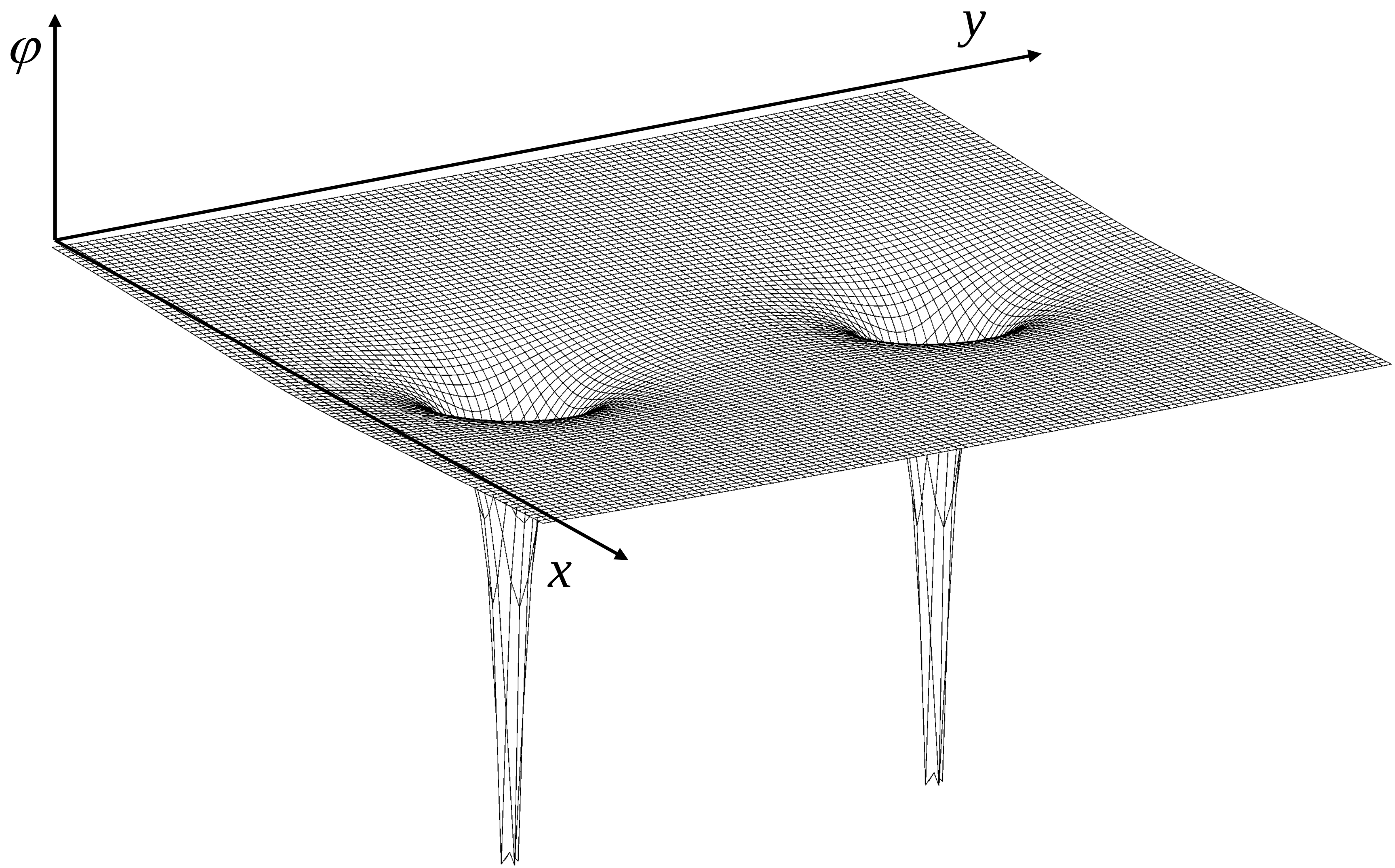
Das Gravitationspotenzial einer Punktmasse *m* ist gegeben durch

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\gamma \frac{m}{r}}$$

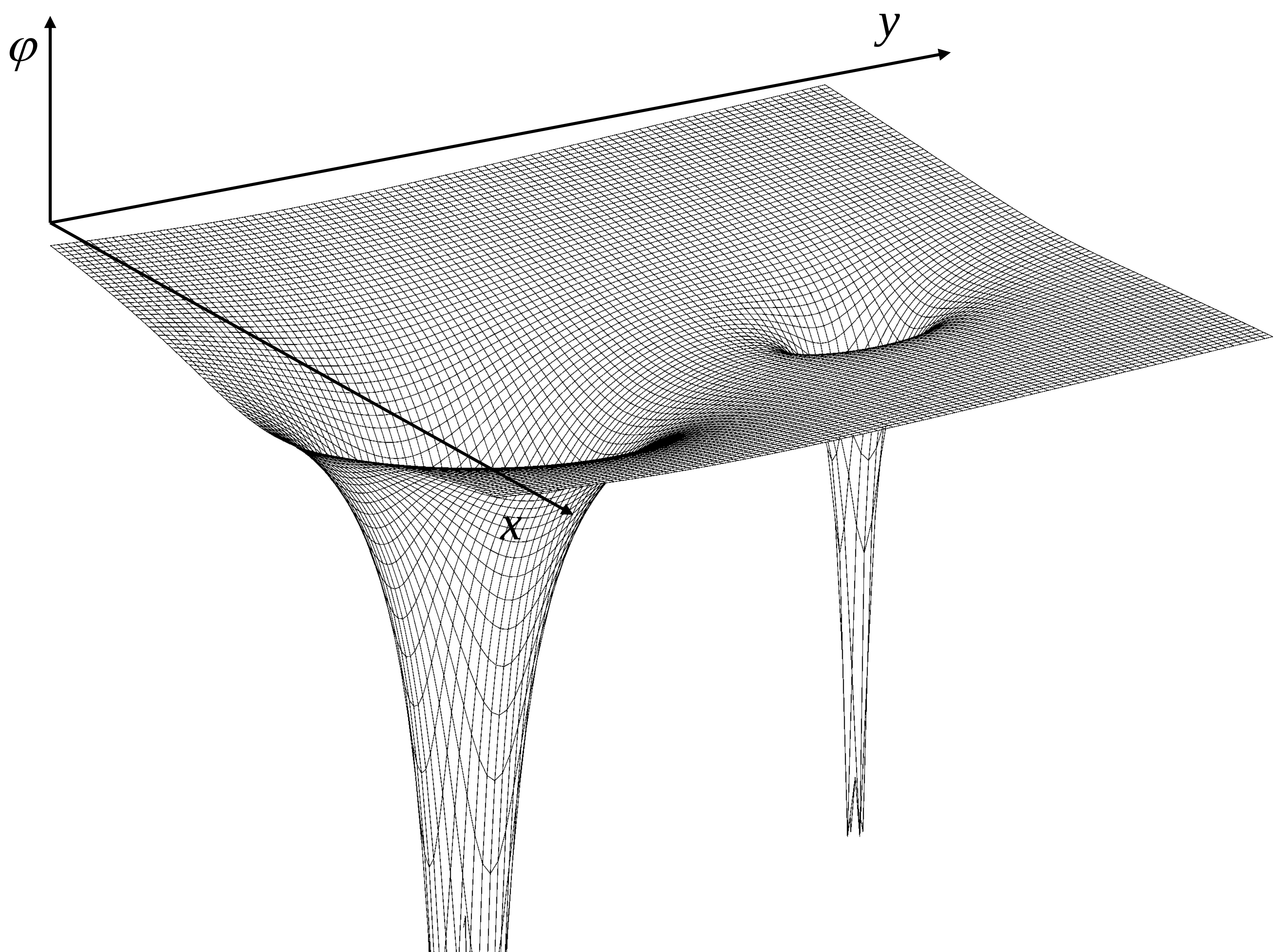
Potenzial von einer Masse



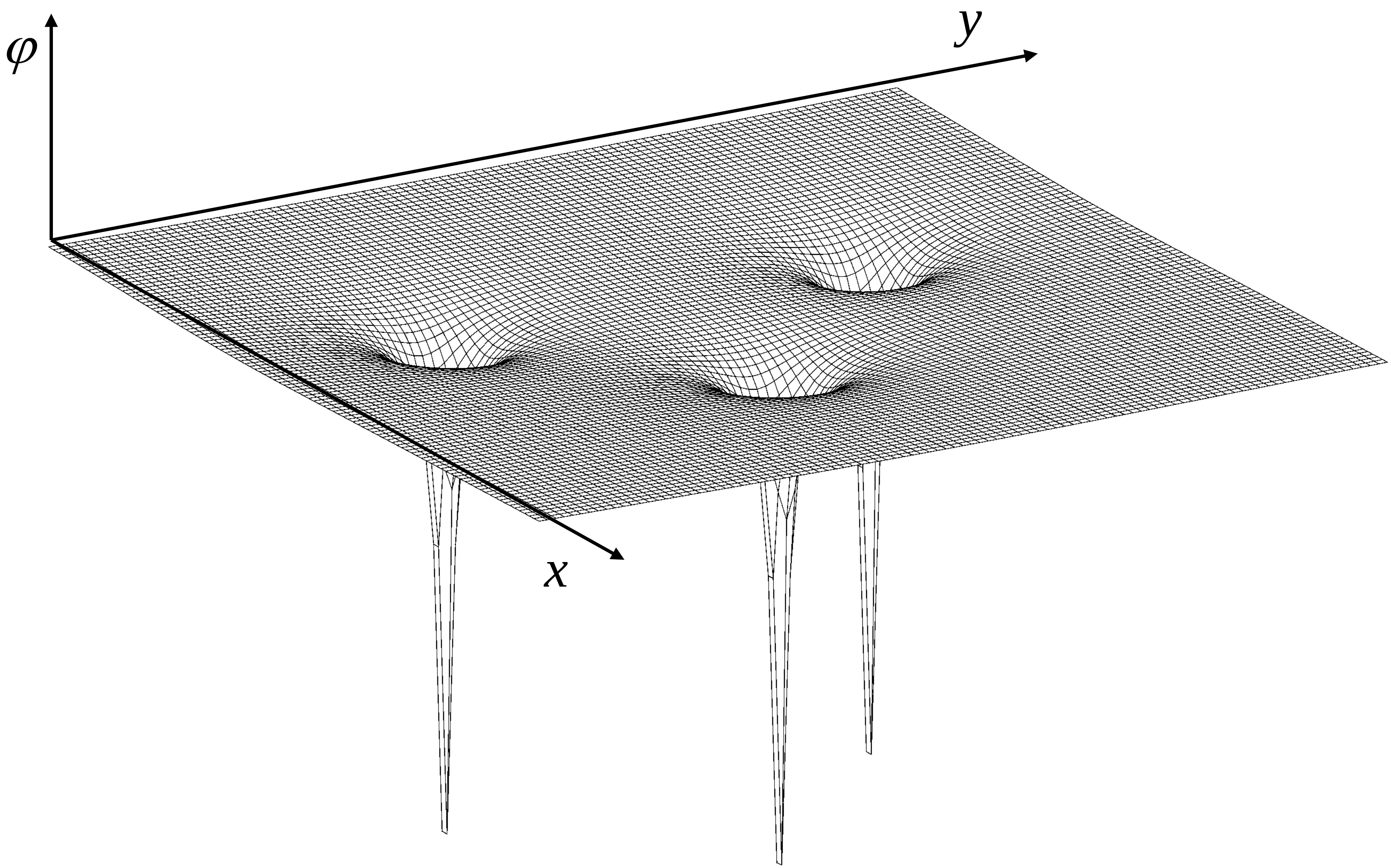
Potenzial von zwei gleichgroße Massen



Potenzial von zwei Massen $m_1/m_2 = 5/1$



Potenzial von drei Massen



Berechnung der Feldstärke aus dem Potenzial:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})$$

Gradient in kartesischen Koordinaten:

$$\mathrm{grad}\,\varphi(x,y,z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

analog Berechnung der Kraft aus der potentiellen Energie:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,E_{\mathrm{pot}}(\vec{r})$$

Der Gradient gibt Richtung und Betrag der Steigung eines skalaren Feldes an.

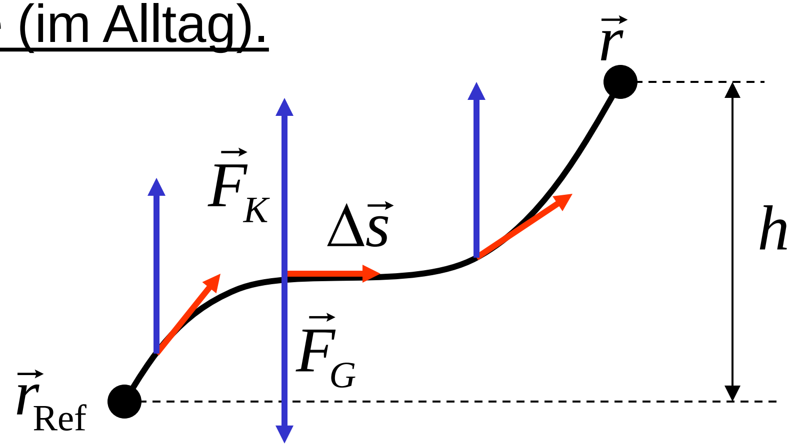
Vorstellung:

Potentielle Energie = Berglandschaft $\rightarrow$ Gradient zeigt bergauf

Kraft wirkt bergab = $-\,\mathrm{grad}\,E_{\mathrm{pot}}(\vec{r})$

Potentielle Energie an der Erdoberfläche (im Alltag).

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{\text{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}_G \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$



$\vec{r}_{\text{Ref}}$ = Fußboden (Referenzhöhe)

Die Kraft ist in guter Näherung konstant = *mg* und wirkt immer senkrecht

$$E_{\text{pot}}(h) = m\,g\,h$$

h vom Fußboden aus gemessen ($h \ll r_{Erde}$).

Einheit der Energie und der Arbeit:

1 Joule = 1 Newton * 1 Meter

1 J = 1 N m = 1 kg m^2 / s^2

Einheit kann auf die bekannten Einheiten zurückgeführt werden.

Vergleich:

	Feld einer Punktmasse *M*	Gravitationsfeld im Labor
Kraft:	$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{M\,m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{F}(\vec{r}) = (0, 0, -mg)$
Feldstärke:	$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{g}(\vec{r}) = (0, 0, -g)$
Pot. Energie:	$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = -\gamma \frac{M\,m}{r}$	$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = m\,g\,z$
Potenzial:	$\varphi(\vec{r}) = -\gamma \frac{M}{r}$	$\varphi(\vec{r}) = g\,z$
	Bezugspunkt im Unendlichen, *M* am Koordinatenursprung	Bezugspunkt bei z=0, z-Koordinate zeigt nach oben

Auf dem Weg zu einem Erhaltungssatz müssen wir eine weitere Energieform definieren, die *kinetische Energie* eines Körpers.

$$\boxed{E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m \left|\vec{v}\right|^2}$$

Wir beweisen nun auf der Basis von Newtons Axiomen, dass die Summe aus potentieller und kinetischer Energie aller Körper in einem abgeschlossenen System erhalten ist.

$$E_{ges} = \sum_i E_{\mathrm{pot}} + \sum_i E_{\mathrm{kin}}$$

Dazu betrachten wir ein kleines Zeitintervall und berechnen die Änderung der Gesamtenergie in diesem Zeitintervall

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ges}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i \neq j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \varphi_j\right) + \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2} m \left|\vec{v}_i\right|^2\right)$$

Es gilt immer: $\left|\vec{v}\right|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ und die potentielle Energie ändert sich sowohl durch die Bewegung von Teilchen *j* als auch Teilchen *i*.

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i \neq j}\left(m_i \,\mathrm{grad}_{\mathrm{r_j}} \varphi_j \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_j}{\mathrm{d}t}\right) + \sum_{i \neq j}\left(m_i \,\mathrm{grad}_{\mathrm{r_i}} \varphi_j \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) + \sum_i \left(\frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{\mathrm{d}t}\right)$$

Anwenden der Produktregel im letzten Term liefert

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i \neq j}\left(m_i \,\mathrm{grad}_{\mathrm{r_i}} \varphi_j \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) - \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \sum_i m\vec{a}_i \cdot \vec{v}_i$$

Anwenden des zweiten Newtonschen Axioms $m\vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}$ liefert

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i \neq j}\left(m_i \,\mathrm{grad}_{\mathrm{r_i}} \varphi_j \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) - \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i$$

Die letzten beiden Terme heben sich gegenseitig auf.

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i\neq j}\left(m_i \operatorname{grad}_{\mathrm{r_i}} \varphi_j \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \right) - \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i$$

Wegen des dritten Newtonschen Axioms $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ gilt $m_i \operatorname{grad}_{\mathrm{r_i}} \varphi_j = -m_j \operatorname{grad}_{\mathrm{r_j}} \varphi_i$

Außerdem sind hier nur solche Geschwindigkeiten relevant, die den Abstand der Teilchen *i* und *j* ändern. Dies geschieht symmetrisch. Daher gilt

$$m_i \operatorname{grad}_{\mathrm{r_i}} \varphi_j \cdot \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = -m_j \operatorname{grad}_{\mathrm{r_j}} \varphi_i \cdot \frac{\mathrm{d}r_j}{\mathrm{d}t}$$

Daher heben sich die Terme in der ersten Summe paarweise gegenseitig auf.

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i\neq j}\left(m_i \operatorname{grad}_{\mathrm{r_i}} \varphi_j \cdot \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} \right) = 0$$

Damit ist bewiesen, dass die Gesamtenergie eines Systems aus Körpern erhalten ist.

$$\boxed{E_{ges} = \text{const.}}$$

Einzelner Körper in statischem Gravitationsfeld

Bewegt sich ein einzelner Körper in einem Gravitationsfeld und ist die Rückwirkung des Körpers auf das Feld so klein, dass sie vernachlässigt werden soll, dann ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie des Körpers konstant. Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ges}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\varphi\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}\, m\left|\vec{v}\right|^2\right)$$

Umschreiben mit der Kettenregel liefert

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = m \,\mathrm{grad}\varphi \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}\, m\left|\vec{v}\right|^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = m\left(-\,\vec{g}\,\right)\cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} + m\vec{a}\cdot\vec{v}$$

Damit folgt

$$\frac{\mathrm{d}E_{ges}}{\mathrm{d}t} = -m\vec{g}\cdot\vec{v} + m\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$$

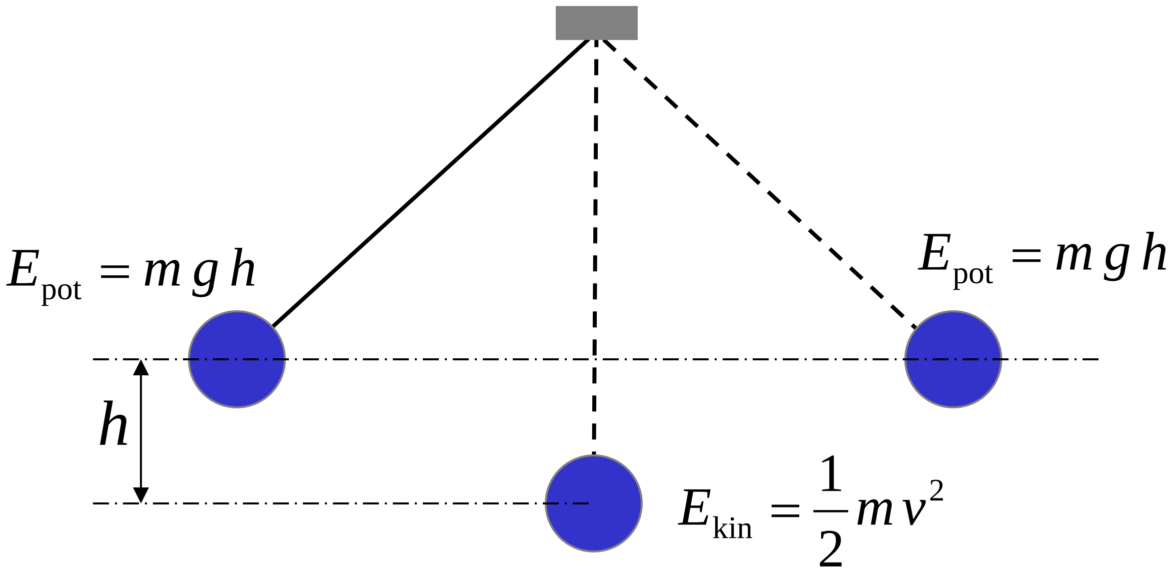
und zusammen mit Newtons Aktionsprinzip schließlich die Energieerhaltung für den Körper im statischen Gravitationsfeld.

$$\boxed{E = E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}}}$$

Die Erhaltung der Summe aus potentieller und kinetische Energie gilt nur in der Punktmechanik. Ausgedehnte Körper haben zusätzliche Freiheitsgrade, die Energie tragen können (Rotation, innere Freiheitsgrade).

Beispiel zu einzelnem Körper in statischen Gravitationsfeld

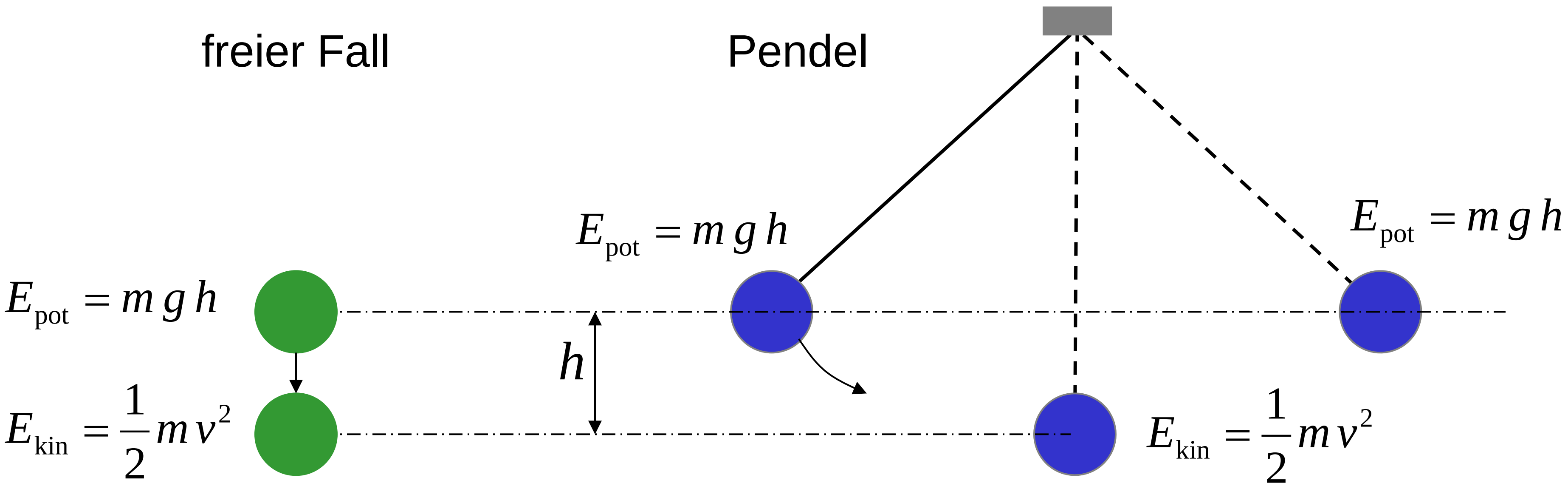
Fadenpendel:



Die Rückwirkung des Pendels auf das Feld der Erde ist sehr klein. Daher ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie der Kugel erhalten

$$E_{\text{ges}} = mgh + \frac{1}{2} m\,v^2 = \text{const}$$

Die Energieerhaltung ist praktisch, um den Betrag der Geschwindigkeit zu berechnen, ohne die genaue Bahnkurve berechnen zu müssen.



In beiden Fällen erhält man aus dem Energiesatz den gleichen Wert $|\vec{v}|$

Beim Fadenpendel wirken zusätzliche Kräfte (Zwangskräfte), die die Richtung von $\vec{v}$ ändern, aber keine Arbeit verrichten. Korrekterweise rechnet man mit einer generalisierten Koordinate q entlang der gebogenen Bahn. Dann gilt:

$$E = m\,g\,h(q) + \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \right)^2$$

Beispiel: Planetenbewegung bei ortsfester Sonne (ohne Rückwirkung des Planeten)

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = -\gamma \frac{m_1\, m_2}{r} \;+\; \frac{1}{2} m_2 \left|\vec{v}\right|^2$$

Bei Kreisbewegungen bleibt r konstant $\rightarrow$ E_{pot} ist konstant

$\rightarrow$ E_{kin} ist konstant $\rightarrow$ $\left|\vec{v}\right|$ ist konstant.

Bei elliptischen Bahnen wird E_{pot} und E_{kin} ineinander umgewandelt

In kartesischen Koordinaten:

$$E = -\gamma \frac{m_1\, m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \;+\; \frac{1}{2} m_2 \,(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2)$$

Berechnung auf dem Computer:

Wahl verschiedener Anfangsbedingungen.

$x_0 = 150.0\ 10^9$ m $\quad y_0 = 0$ m $\quad v_{x0} = 0 \quad v_{y0} = 29747$ m/s (Kreis)

$x_0 = 150.0\ 10^9$ m $\quad y_0 = 0$ m $\quad v_{x0} = 0 \quad v_{y0} = 15000$ m/s (Ellipse)

Die Energieerhaltung ist von grundlegender Bedeutung in der Physik.
In der theoretischen Physik wird gezeigt, dass Sie aus der Translationsinvarianz der Zeit folgt.
Noether-Theorem: Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

In der theoretischen Physik werden u.a. alternative Axiomensysteme verwendet, die auf der Erhaltung der Energie basieren.

Bei ausgedehnten Körpern müssen weitere Energieformen berücksichtigt werden (Rotationsenergie, Wärmeenergie, elastische Energie). Felder können nicht nur potentielle Energie tragen sondern Energie auch als Wellen transportieren.

Der Energieerhaltungssatz gilt nur in Inertialsystemen.

Der Begriff „Energieverbrauch“ im Alltag bedeutet, dass Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird und aus thermodynamischen Gründen keine Rückumwandlung möglich ist.

Massenerhaltung

In einem abgeschlossenen System bleibt die Masse erhalten.

Anmerkungen zur Relativitätstheorie:

Die Relativitätstheorie verknüpft beide Erhaltungssätze durch den Zusammenhang:

$$E = m\,c^2$$

Energie und Masse können ineinander umgewandelt werden.

Speicherung der kinetischen Energie im bewegten Körper erfolgt als Masse.

$$E_{\mathrm{ges}} = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\,c^2 + E_{\mathrm{kin}} = m\,c^2$$

Massenzunahme eines Sprinters: $5 \cdot 10^{-14}$ kg

Kinetische Energie der Erde entspricht: $3 \cdot 10^{+16}$ kg

Die vergrößerte Masse unterliegt nun der Trägheit.

Das Gravitationsfeld hat eine Energiedichte

$$\frac{E}{V} = -\frac{\left|\vec{g}\right|^2}{8\pi\,\gamma}$$

Die potentielle Energie eines Systems von Massen ist in der Feldenergie gespeichert. Gravitationswellen können Energie transportieren.

Die Feldenergie ist einer Masse proportional $E = m\,c^2$ die wiederum Gravitation verursacht.

Dieser Effekt erklärt die Periheldrehung des Merkur (Rosettenbahn).

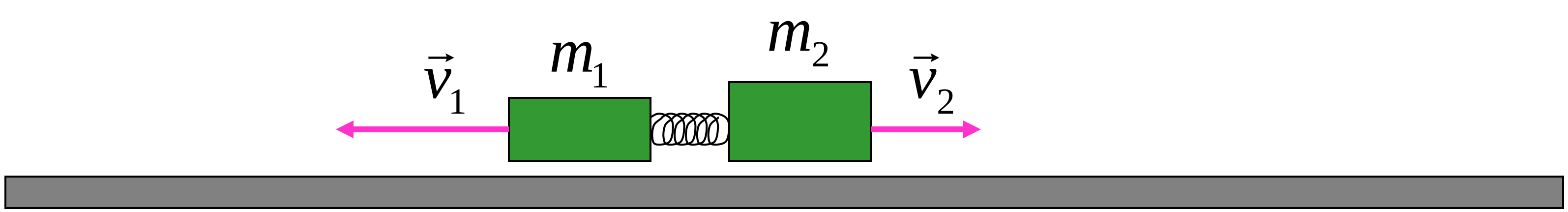
Periheldrehung pro Jahrhundert in Bogensekunden:

Experiment:	5600,7 $\pm$ 0.4
Berechnete Drehung durch andere Planeten:	5557,6 $\pm$ 0.2
Differenz:	43,1 $\pm$ 0.6
Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie:	43,0

Impuls

Suche nach einer weiteren Erhaltungsgröße:

Versuch Luftkissenschiene:



Es wirken innere Kräfte (Feder) im abgeschlossenen System.

Offensichtlich wird die Gesamtgeschwindigkeit nicht erhalten.

Aber für das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit finden wir experimentell:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.}$$

Wir definieren daher den Impuls eines Körpers

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{v}}$$

„Impuls“ ist uns aus der Alltagserfahrung wenig vertraut.

Im Sprachgebrauch heißt es soviel wie „Anstoß“. Der physikalische Begriff kommt vermutlich aus der Beobachtung bei Stößen.

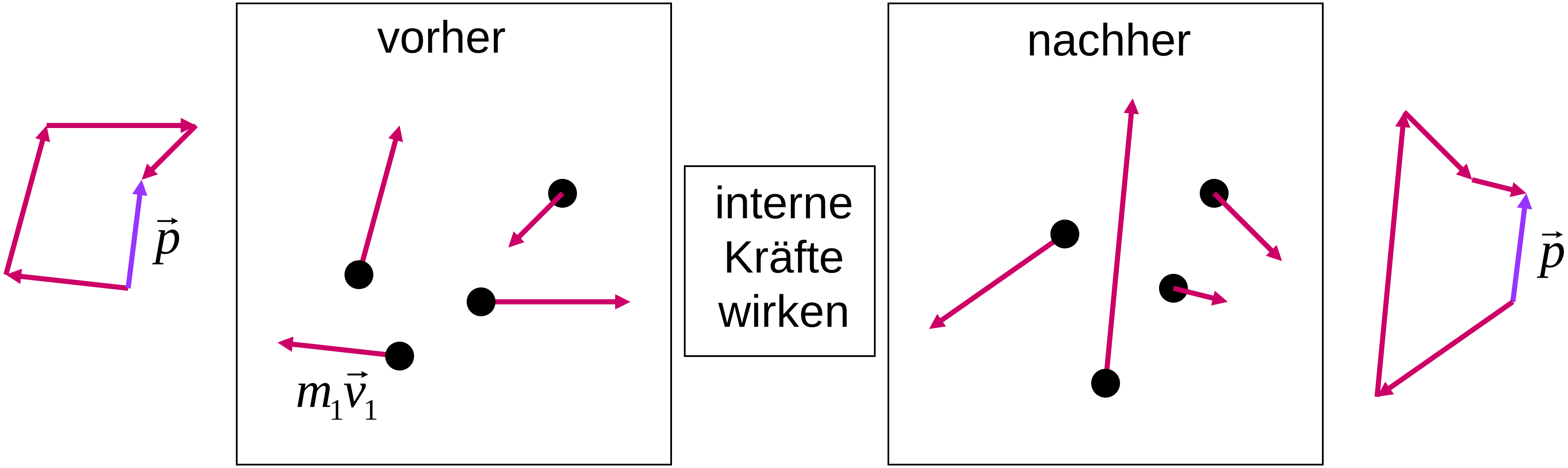
Die Impulserhaltung ist wie die Energieerhaltung grundlegend in der Physik.

> Die vektorielle Summe aller Impulse in einem abgeschlossenen System wird als Vektor erhalten.
>
> $$\vec{p}_{ges} = \sum_i m_i \, \vec{v}_i = \mathrm{const.}$$

Beweis auf der Basis von Newtons zweitem und drittem Axiom:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{ges}}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \, \vec{a}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0$$

Wegen Newtons drittem Axiom $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ heben sich die Summanden paarweise auf und die Summe ergibt Null. Damit ist der Gesamtimpuls eine Konstante (konstanter Vektor).



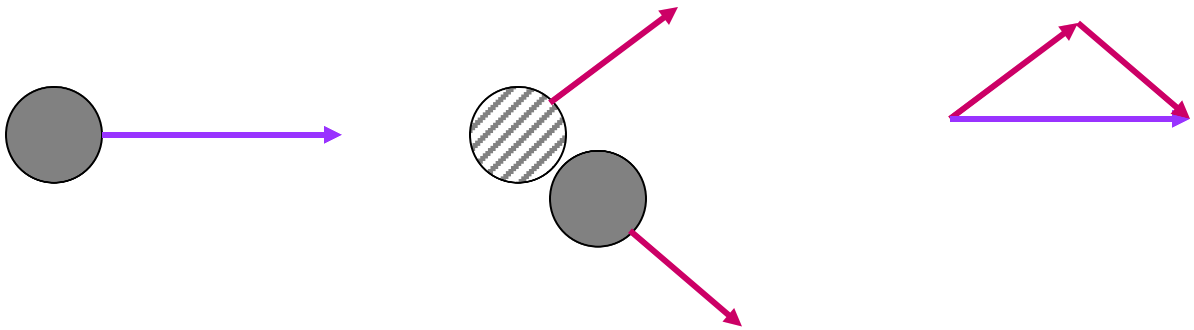
Stellt man den Vektor des Gesamtimpulses in einem Koordinatensystem dar, wird jede der 3 Komponenten des Vektors für sich erhalten.

Die vektoriellen Impulse eines Systems können sich auch zu Null addieren, obwohl sich die Teilchen bewegen. Dann wird der Gesamtimpuls Null erhalten.

Der Impulserhaltungssatz gilt nur in Inertialsystemen.

Der Impulserhaltungsatz gilt auch für ausgedehnte Körper in dieser Form. Innere Freiheitsgrade spielen keine Rolle.

Versuch „Billiard“:



Energie- und Impulserhaltungssatz sind hilfreich, um Aussagen über den Bewegungszustand nach einer Wechselwirkung zu machen, ohne die Bahnen der Massen während der Wechselwirkung zu kennen.

Beide Erhaltungssätze zusammen reichen nur in einfachen Fällen, um alle Bewegungsgrößen zu berechnen.

Ursprüngliche Form des Newtonschen Aktionsprinzipes

Newton hat ursprünglich sein Aktionsprinzip mit dem Impuls formuliert.

DEFINITION II.

The Quantity of Motion is the meaſure of the ſame, ariſing from the velocity and quantity of matter conjunctly.

LAW II.

The alteration of motion is ever proportional to the motive force impreſs'd; and is made in the direction of the right line in which that force is impreſs'd.

Heute schreiben wir

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t}$$

Die Masse eines Körpers ist in der klassischen Mechanik konstant, daher folgt

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

In der Relativitätstheorie nimmt die Masse mit der Geschwindigkeit zu:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

der relativistische Impuls lautet

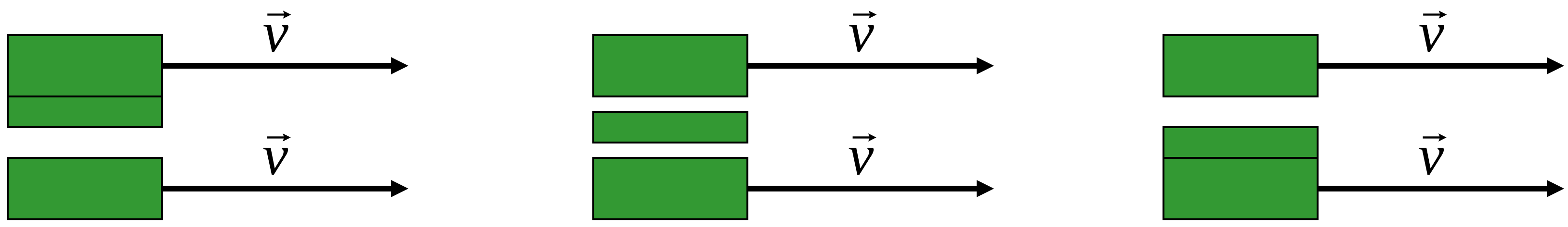
$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\vec{v}$$

Die zur Beschleunigung notwendige Kraft ist

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\left|\vec{v}\right|}\frac{\mathrm{d}\left|\vec{v}\right|}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

In der Newtonschen Mechanik ist der Term $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}$ immer gleich Null. Korrekterweise wird mit Körpern und deren Masse gerechnet. Auch der Impuls wird auf Körper bezogen. Wird Masse ausgetauscht, dann muss ein zusätzlicher Körper dafür eingeführt werden.

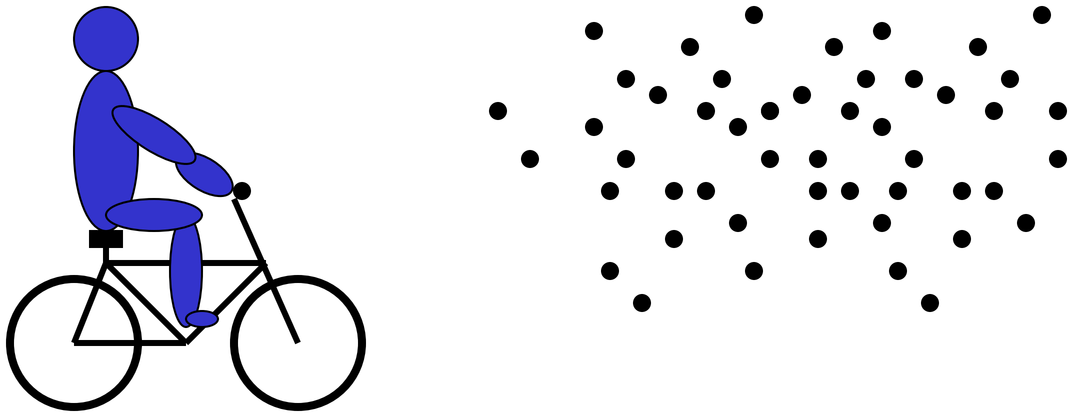
<u>Gedankenexperiment:</u>



In dem Gedankenexperiment wird Masse vom oberen zum unteren Körper ausgetauscht. Diese Masse muss als dritter Körper betrachtet werden und nimmt ihren Impuls mit. Für alle drei Körper gilt

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} = 0$$

Gedankenexperiment: Radfahrer im Mückenschwarm:



Die Mücken bleiben am Radfahrer kleben.

Die Masse des Radfahrers erhöht sich um *dm* pro Zeitintervall *dt.*

Die Kraft zur Beschleunigung des Radfahrers beträgt:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Hier ist der erste Term der Impulsübertrag auf die Mücken (Beschleunigung der Mücken von 0 auf v). Das Resultat sieht nur so aus, als käme es aus der Produktregel angewendet auf das Aktionsprinzip. Die Kraft berechnet sich anders in einem bewegten Inertialsystem.

Versuch Rakete:

Rakete ändert ihre Masse durch den Ausstoß von Treibstoff.

Berechnung im Bezugssystem Erde.

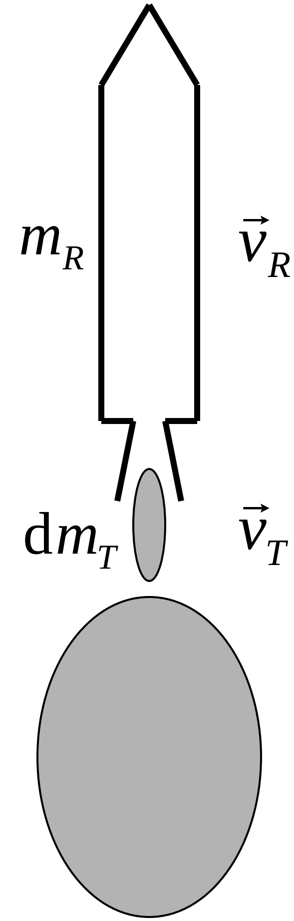
Im Zeitintervall dt stößt die Rakete die Masse dm mit

Relativgeschwindigkeit $\vec{u} = \vec{v}_T - \vec{v}_R$ aus.

Der Impulsübertrag auf den Treibstoff ist $\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}m_T \, \vec{u}$

Die Kraft auf die Rakete (Gegenkraft) ist also

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m_T}{\mathrm{d}t}\vec{u}$$



Sie wirkt gegen die Gewichtskraft und beschleunigt die Rakete

$$\vec{F} = m_R \frac{d\,\vec{v}_R}{\mathrm{d}t} - m_R\vec{g}$$

Gleichsetzen liefert

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_R}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{m_R}\frac{\mathrm{d}m_T}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \vec{g}$$

Beachte: $\mathrm{d}m_T = -\mathrm{d}m_R$

Lösen der Differentialgleichung durch Integration:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_R}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_R}\frac{\mathrm{d}m_R}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \vec{g}$$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}\vec{v}_R}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \int_0^t \left(\frac{1}{m_R(t')}\frac{\mathrm{d}m_R}{\mathrm{d}t'}\vec{u} + \vec{g}\right)\mathrm{d}t'$$

$$\vec{v}_R(t) - \vec{v}_R(0) = \vec{u}\int_{m(0)}^{m(t)} \frac{1}{m'_R}\mathrm{d}m'_R + \int_0^{\mathrm{t}} \vec{g}\,\mathrm{d}t'$$

$$\vec{v}_R(t) - \vec{v}_0 = \vec{u}\,(\ln m_R(t) - \ln m_0) + \vec{g}t$$

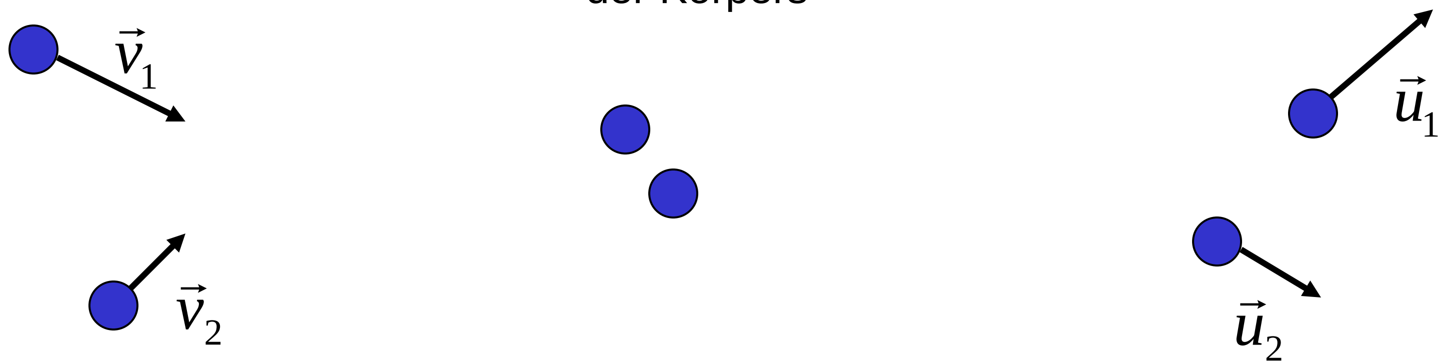
$$\vec{v}_R(t) = \vec{v}_0 + \vec{u}\,\ln\frac{m_R(t)}{m_0} + \vec{g}\,t$$

Endgeschwindigkeit hängt nur von der Ausstoßgeschwindigkeit *u,* vom Verhältnis Nutzlast / Startmasse und von der Gesamtzeit ab.

Stoßgesetze (Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes)

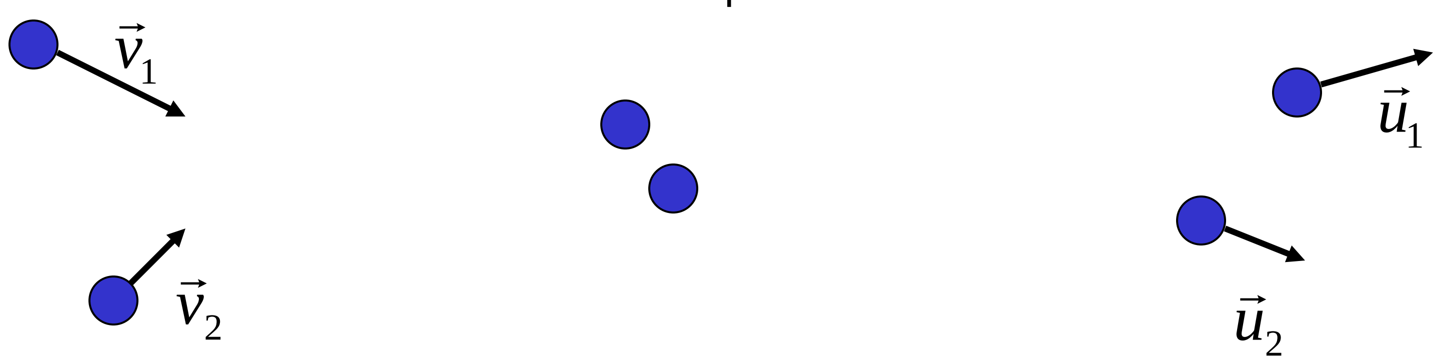
Elastischer Stoß:

keine Kräfte | Keine Anregung innerer Freiheitsgrade der Körpers | keine Kräfte



Inelastischer Stoß:

keine Kräfte | Anregung innerer Freiheitsgrade der Körpers | keine Kräfte



Für elastische und inelastische Stöße gilt die Impulserhaltung, wenn man sich auf die Schwerpunkte der Körper bezieht:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

für elastische Stöße gilt zusätzlich die Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2{}^2$$

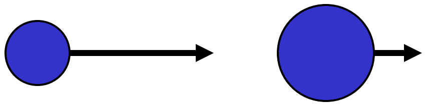
bei inelastischen Stößen wird mechanische Energie in innere Freiheitsgrade (z.B. Wärme) der Körper transferiert.

Es gilt nur noch die Ungleichung

$$\frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 > \frac{1}{2}m_1 u_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2{}^2$$

Elastische Stöße:

Zentraler Stoß (eindimensionale Bewegung)



Es gelten beide Erhaltungssätze

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2{}^2$$

zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten u_1 und u_2 . Auflösen liefert:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Spezialfälle zum zentralen elastischen Stoß:

1. Massen der Kugeln sind gleich:

$$u_1 = v_2 \quad , \qquad u_2 = v_1$$

Geschwindigkeiten vertauschen sich.

2. Gleiche Massen und zweite Kugel ruht vor dem Stoß:

$$u_1 = 0 \quad , \qquad u_2 = v_1$$

erste Kugel ruht nach dem Stoß und maximaler Energieübertrag erfolgt.

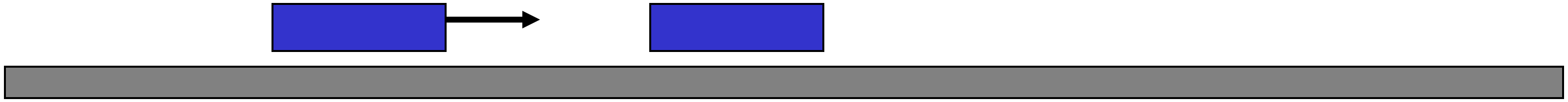
3. Zweite Masse ist unendlich groß und ruht:

$$u_1 = -v_1 \quad , \qquad u_2 = 0$$

Masse eins wird reflektiert, kein Energieübertrag, maximaler Impulsübertrag

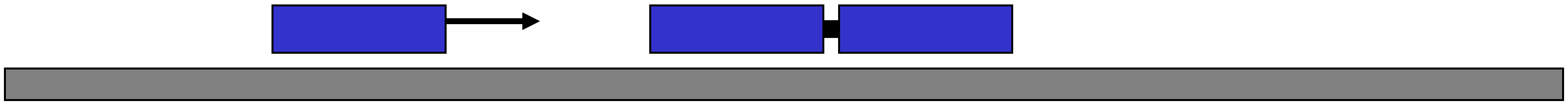
$$\Delta p = m_1 u_1 - m_1 v_1 = -2 m_1 v_1$$

<u>Versuch:</u> Stöße mit Waagen auf Luftkissenschiene



$$v_1 = v \qquad m_1 = m \qquad \qquad u_1 = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$v_2 = 0 \qquad m_2 = m \qquad \qquad u_2 = v$$

$$v_1 = v \qquad m_1 = m \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = -v$$



$$v_1 = v \qquad m_1 = m$$
$$v_2 = 0 \qquad m_2 = 2m$$

$$\Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -\frac{1}{3}v$$

$$u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = +\frac{2}{3}v$$

$$v_1 = v \qquad m_1 = 2m$$
$$v_2 = 0 \qquad m_2 = m$$

$$\Rightarrow$$

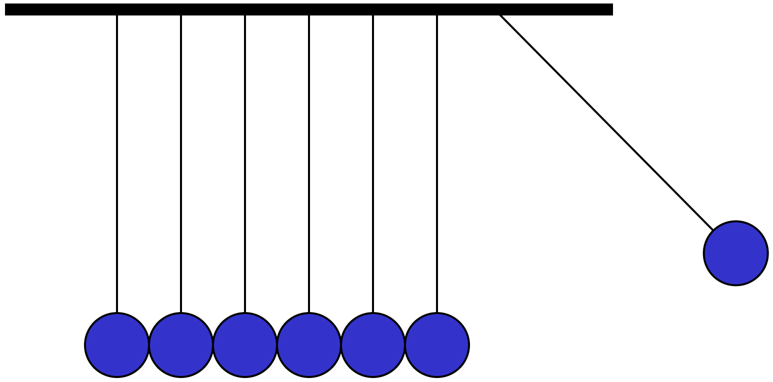
$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = +\frac{1}{3}v$$

$$u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = +\frac{4}{3}v$$

Versuch: Kugelreihe mit und ohne Klebewachs

$$n_1 m v_1 = n_2 m v_2$$ Impulserhaltung

$$\frac{1}{2} n_1 m v_1^{\,2} = \frac{1}{2} n_2 m v_2^{\,2}$$ Energieerhaltung



Beide Gleichungen sind erfüllt, wenn gilt

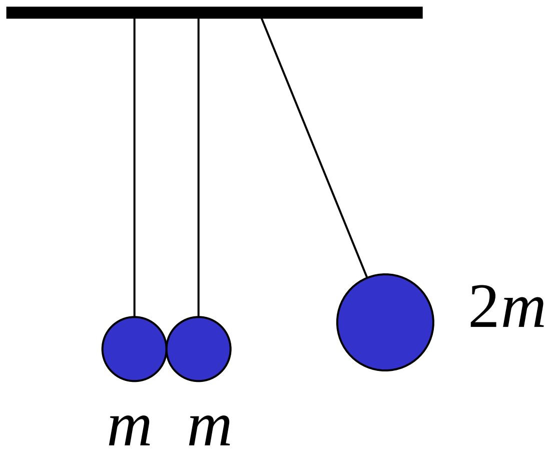
$$n_1 = n_2 \quad , \quad v_1 = v_2$$

Inelastischer Stoß:

Klebewachs führt zu Verlust von mechanischer Energie (inelastischer Stoß).

Kleine Geschwindigkeiten aller Kugeln werden bevorzugt, da E_{kin} bei gleichem Impuls kleiner ist, als bei wenigen schnellen Kugeln.

<u>Komplizierter als vermutet:</u>



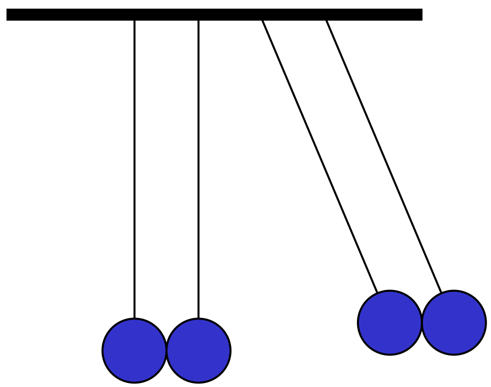
$$2mv_1 = 2mu_1 + mu_2 + mu_3$$

$$2\tfrac{1}{2}mv_1^2 = 2\tfrac{1}{2}mu_1^2 + \tfrac{1}{2}mu_2^2 + \tfrac{1}{2}mu_3^2$$

Aus den Erhaltungssätzen ergibt sich

$$2v_1 = 2u_1 + u_2 + u_3$$

$$2v_1^2 = 2u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$



Quadrieren der ersten Gleichung:

$$4v_1^2 = 4u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 4u_1u_2 + 2u_2u_3 + 4u_1u_3$$

Abziehen der zweiten Gleichung:

$$v_1^2 = u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2u_3 + 2u_1u_3$$

Es gibt unendlich viele mögliche Kombinationen der Endgeschwindigkeiten.
Das Ergebnis hängt vom konkreten Ablauf des Stossprozesses ab.

Dezentraler Stoß (dreidimensionale Bewegung)

Es gelten beide Erhaltungssätze mit vektoriellen Geschwindigkeiten.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1\left|\vec{v}_1\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\vec{v}_2\right|^2 = \frac{1}{2}m_1\left|\vec{u}_1\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\vec{u}_2\right|^2$$

In Komponentenschreibweise:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}$$

$$m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} = m_1 u_{1z} + m_2 u_{2z}$$

Jede Komponente des Impulses wird für sich erhalten

$$\frac{1}{2}m_1({v_{1x}}^2 + {v_{1y}}^2 + {v_{1z}}^2) + \frac{1}{2}m_2({v_{2x}}^2 + {v_{2y}}^2 + {v_{2z}}^2) = \frac{1}{2}m_1({u_{1x}}^2 + {u_{1y}}^2 + {u_{1z}}^2) + \frac{1}{2}m_2({u_{2x}}^2 + {u_{2y}}^2 + {u_{2z}}^2)$$

4 Gleichungen mit 6 Unbekannten u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}, u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}.

Ergebnis hängt von der Geometrie des Stoßes ab. $\rightarrow$ Berechnung der Bahnen

Dezentraler Stoß im Schwerpunktsystem

Wahl des Koordinatensystems führt zur Vereinfachung.

Jedes Inertialsystem ist zur Beschreibung physikalischer Vorgänge geeignet (siehe nächster Abschnitt).

Gradlinig-gleichförmig bewegte Koordinatensysteme sind Inertialsysteme.

Schwerpunkt (Massenmittelpunkt).

Definition: Der Punkt

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad \text{Gesamtmasse: } M = \sum_i m_i$$

heißt Schwerpunkt.

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems wird erhalten,

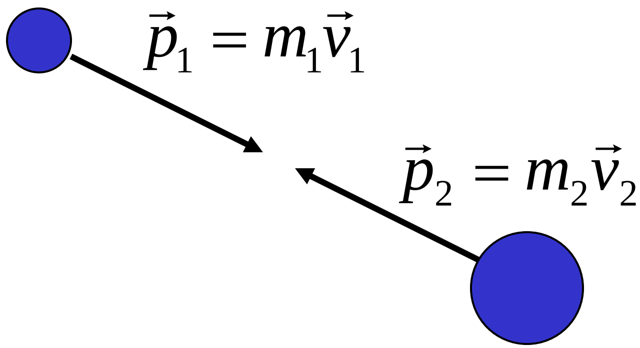
$$\vec{p}_{\mathrm{ges}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{r}}_S = M \vec{v}_S = \vec{p}_S$$

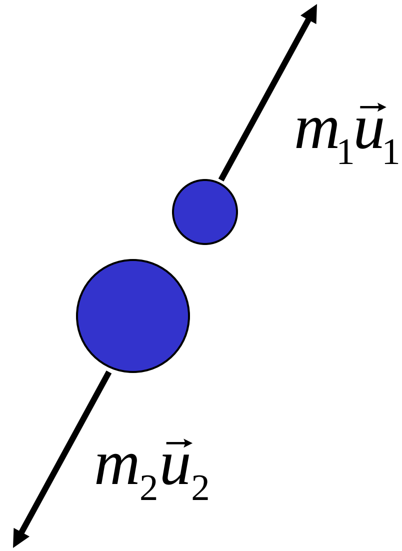
also bewegt sich der Schwerpunkt gradlinig-gleichförmig.

Er ist Ursprung eines Inertialsystems.

Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem ist Null, da der Schwerpunkt nun im Ursprung ruht. Für <u>zwei</u> Teilchen gilt:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$$





Die kinetische Energie wird beim elastischen Stoß erhalten:

$$\frac{1}{2}m_1\left|\vec{v}_1\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\vec{v}_2\right|^2 = \frac{1}{2}m_1\left|\vec{u}_1\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\vec{u}_2\right|^2$$

mit $m_1\left|\vec{v}_1\right| = m_2\left|\vec{v}_2\right|$ und $m_1\left|\vec{u}_1\right| = m_2\left|\vec{u}_2\right|$ folgt (hier ohne Rechnung),

dass sich nur die Richtung der Geschwindigkeiten ändert (Impulsübertrag), aber beide Massen jeweils ihre kinetische Energie beibehalten.

Bei drei Teilchen kann auch Energie ausgetauscht werden.

Inelastischer Stoß im Schwerpunktsystem:

Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem ist Null

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

Durch Energieumwandlung wird die kinetische Energie kleiner.

Nach dem Stoß muss immer noch gelten:

$$\sum_i \vec{p}_i' = 0$$

Aber die einzelnen Beträge der Impulse können kleiner sein.

Im Extremfall können alle Einzelimpulse Null werden.

Umwandlung der gesamten kinetischen Energie der Relativbewegungen.

Vom anderen Koordinatensystem aus gesehen: Die „Schwerpunktenergie“ bleibt übrig:

$$E_S = \frac{1}{2} M \left|\vec{v}_S\right|^2$$

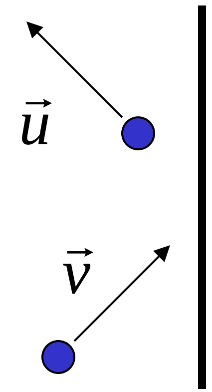
Stöße an Wänden:

Das System ist nicht abgeschlossen. Äußere Kräfte der Wand.

1. elastisch:

Die Wand bleibt in Ruhe, also kein Energieübertrag auf die Wand.

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m u^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = |\vec{u}|$$



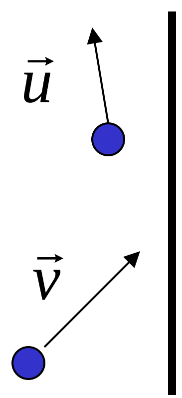
Keine Kräfte parallel zur Wand

$$m v_{\|} = m u_{\|}$$

Folglich: $m v_{\perp} = -m u_{\perp}$

2. inelastisch:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 > \tfrac{1}{2} m u^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| > |\vec{u}|$$



Keine Kräfte parallel zur Wand

$$m v_{\|} = m u_{\|}$$

Folglich: $|m v_{\perp}| > |-m u_{\perp}|$