Übungszettel 11 - Inertialsysteme und Schaltkreise (Abgabetermin: 21.01.2015)

Aufgabe 1 - Lorentzinvarianz (12 Punkte)

(a) Zeige explizit, dass das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{B}$ lorentzinvariant ist.
Hinweis: Falls zwei Inertialsysteme $\mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}$ sich mit Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$ (als Geschwindigkeit von $\bar{\mathcal{S}}$ relativ zu $\mathcal{S}$) zueinander bewegen, gilt

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= E_x, \quad \bar{E}_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right), \quad \bar{E}_z = \gamma\left(E_z + vB_y\right), \\ \bar{B}_x &= B_x, \quad \bar{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad \bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right), \end{aligned}$$

wobei $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

(b) Zeige explizit, dass die Größe $E^2 - c^2B^2$ lorentzinvariant ist.

(c) Es sei $\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \vec{0}$ aber $\vec{E}\left(\vec{r}\right) \neq \vec{0}$ an einem Punkt $\vec{r}$ in einem Inertialsystem $\mathcal{S}$. Existiert ein Inertialsystem, in dem $\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \vec{0}$? Falls ja, gib ein solches Inertialsystem an. Falls nein, begründe, warum dies unmöglich ist.

Aufgabe 2 - Elektromagnetische Wellen in Inertialsystemen (16 Punkte)

Betrachte eine elektromagnetische Welle mit Frequenz ω, die sich in x-Richtung im Vakuum ausbreitet. Falls sie in y-Richtung polarisiert ist, kann man das elektrische Feld in einem Inertialsystem $\mathcal{S}$ folgendermaßen schreiben,

$$\vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = E_0 \cos\left(kx - \omega t\right)\hat{e}_y \,. \tag{1}$$

(a) Bestimme k sowie das magnetische Feld $\vec{B}\left(\vec{r}, t\right)$ der elektromagnetischen Welle in Gleichung (1).

(b) Bestimme $\bar{\vec{E}}\left(\bar{\vec{r}}, \bar{t}\right)$ sowie $\bar{\vec{B}}\left(\bar{\vec{r}}, \bar{t}\right)$ in einem Inertialsystem $\bar{\mathcal{S}}$, welches sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$ relativ zu $\mathcal{S}$ bewegt.
Hinweis: Benutze den Hinweis zu Aufgabe 1(a) sowie die Lorentztransformationsgleichungen,

$$x = \gamma\left(\bar{x} + v\bar{t}\right), \quad t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right) \,.$$

Was passiert mit y und z?

(c) In Teilaufgabe (*b*) erhält man das Ergebnis, dass man es auch im Inertialsystem $\bar{\mathcal{S}}$ mit einer elektromagnetischen Welle der Form von Gleichung (1) zu tun hat. Bestimme die Frequenz $\bar{\omega}$ und die Wellenlänge $\bar{\lambda}$ der Welle in $\bar{\mathcal{S}}$. Interpretiere dieses Resultat (insbesondere auch den Effekt des Vorzeichens von v). Dies nennt man Doppler-Effekt. Bestimme die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle in $\bar{\mathcal{S}}$. Warum ist dieses Ergebnis sinnvoll?

(d) Bestimme die relative Intensität der elektromagnetischen Welle zwischen den Inertialsystemen $\mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}$. Diskutiere explizit den Fall $v \simeq c$.
Hinweis: Die Intensität ist proportional zum Quadrat des elektrischen Feldes.

Aufgabe 3 - Kondensatorentladung (20 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Betrachte den elektrischen Schaltkreis in Abbildung 1 (siehe unten) bestehend aus einem Widerstand R und einem Kondensator mit kreisförmigen Kondensatorplatten mit Radius r_0 in Abstand d. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich die Ladung Q_0 auf der linken Kondensatorplatte und die Ladung $-Q_0$ auf der rechten Platte. Zu diesem Zeitpunkt werde nun der Schalter umgelegt und somit der Kreis geschlossen.

(a) Zeige, dass sich das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten als

$$\vec{E}(t) = E_0 e^{-\alpha t} \hat{e}_x$$

für $t \geq 0$ schreiben lässt wobei E_0 und α Konstanten sind. Bestimme die Konstanten E_0 und α.
Hinweis: Nimm an, dass sich die Ladung zu jedem Zeitpunkt homogen auf die Kondensatorplatten verteilt und dass Randeffekte vernachlässigbar sind.

(b) Bestimme das Magnetfeld zwischen den Kondensatorplatten für $t \geq 0$.
Hinweis: Benutze die vierte Maxwell-Gleichung für diese Rechnung. Wir verlassen in dieser Aufgabe das Regime der quasistationären Näherung.

(c) Bestimme die elektromagnetische Energiedichte zwischen den Kondensatorplatten für $t \geq 0$. Bestimme außerdem den Poyntingvektor des elektromagnetischen Feldes in dieser Region für $t \geq 0$.

(d) Betrachte ein Volumen, das durch einen geraden Kreiszylinder mit Radius R und Länge L mit Zylinderachse orthogonal zu den Kondensatorplatten beschrieben wird. Bestimme den Energiefluss durch die Oberfläche solch eines Zylindervolumens zwischen den Kondensatorplatten während des gesamten Entladungsprozesses.
Hinweis: Der Zylinder sei hinreichend klein gewählt und so positioniert, dass man Randeffekte vernachlässigen kann.

(e) *Zusatzaufgabe: Schaue dir noch einmal genau deine Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a) und (b) an. Fällt dir etwas Merkwürdiges / Widersprüchliches auf? Wenn ja, versuche eine Erklärung zu finden!*

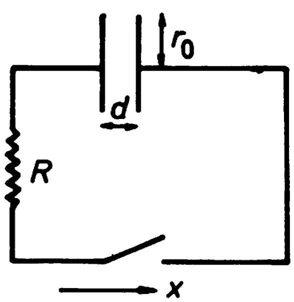

Abbildung 1: RC-Schaltkreis

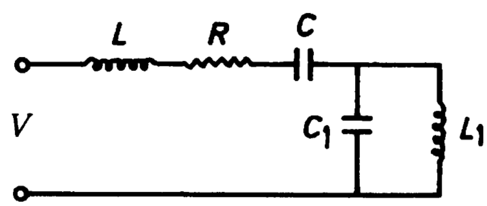

Abbildung 2: Schaltkreis mit Wechselstrom

Aufgabe 4 - Wechselstromkreis (12 Punkte)

Betrachte den elektrischen Schaltkreis in Abbildung 2, wobei V_0 die Spannungsamplitude einer angelegten stationären Wechselspannung V mit Frequenz ω beschreibe.

(a) Bestimme die Impedanz dieses Schaltkreises.
Hinweis: Die Impedanz in Reihe geschalteter Objekte ist additiv. Bei parallel geschalteten Elementen gilt $\frac{1}{Z_{tot}} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$.

(b) Bestimme die minimale und maximale Stromstärkenamplitude I_0 des Stromflusses durch den Schaltkreis für ein gegebenes, konstantes V_0.
Hinweis: Hier ist es noch nicht nötig im Detail die Fälle zu untersuchen, in denen diese Stromstärken angenommen werden. Es genügt die Formel für I_0 *anzugeben und abzuschätzen. Beachte, dass* I_0 *reell sein muss.*

(c) Bei welchen Frequenzen ω wird die minimale Stromstärkenampliutde erreicht? Gib eine physikalische Interpretation für alle möglichen Fälle an, also erkläre, warum für diese Frequenzen die minimale Stromstärke durch den Schaltkreis fließt!