Übungszettel 12 - Fouriertransformation und EM-Wellen (Abgabetermin: 28.01.2015)

Aufgabe 1 - Fouriertransformation (20 Punkte)

Die vierdimensionale Fouriertransformation $\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right) \equiv \mathfrak{F}\left[f\left(\vec{r},t\right)\right]$ einer skalaren Funktion dreier Ortskoordinaten, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, und einer Zeitkoordinate $t \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right) = \mathfrak{F}\left[f\left(\vec{r},t\right)\right] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int d^3r dt\ f\left(\vec{r},t\right) e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\ . \tag{1}$$

Die Rücktransformation $\mathfrak{F}^{-1}\left[\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right)\right] = f\left(\vec{r},t\right)$ ist gegeben durch

$$f\left(\vec{r},t\right) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right)\right] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int d^3k d\omega\ \tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\ . \tag{2}$$

(a) Zeige, dass für jede Funktion $f\left(\vec{r},t\right)$ mit ihrer Fouriertransformierten $\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right)$ die Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} f\left(\vec{r},t\right)\right] &= i\vec{k}\cdot\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right)\ , \\ \mathfrak{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} f\left(\vec{r},t\right)\right] &= -i\omega\cdot\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right) \end{aligned}$$

gelten.
Hinweis: Ersetze auf der linken Seite die Funktionen mit Hilfe von Gleichung (2) *und benutze dann die Linearität der Fouriertransformation.*

(b) Beweise die Plancherel-Gleichung,

$$\forall f\left(\vec{r},t\right), g\left(\vec{r},t\right) \in L^2\left(\mathbb{R}^4\right):\ \left\langle \mathfrak{F}\left[f\right], \mathfrak{F}\left[g\right]\right\rangle = \left\langle f,g\right\rangle\ .$$

Hinweis: $\left\langle \mathfrak{F}\left[f\right], \mathfrak{F}\left[g\right]\right\rangle = \int\int d^3k d\omega\ \tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right)\tilde{g}^*\left(\vec{k},\omega\right)$. *Benutze Gleichung* (1) *sowie die Tatsache, dass* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dx = 2\pi\delta\left(x\right)$.

(c) Zeige, dass die zeitlich und räumlich integrierte Gesamtintensität eines elektrischen Feldes $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)$ identisch mit der entsprechenden "Gesamtintensität" der Fouriertransformierten $\tilde{\vec{E}}\left(\vec{k},\omega\right)$ ist.
Hinweis: Die Intensität ist proportional zum Betragsquadrat des Feldes. Der Einfachheit halber kann der Proportionalitätsfaktor in dieser Aufgabe gleich 1 *gesetzt werden.*

(d) Berechne $\tilde{f}\left(\vec{k},\omega\right)$ für die Funktion $f\left(\vec{r},t\right) = f\left(x,y,z,t\right) = e^{-a_x|x|}e^{-a_y|y|}e^{-a_z|z|}$ mit $a_x, a_y, a_z > 0$.
Hinweis: Um die Betragsstriche im Exponenten zu eliminieren, versuche den Integrationsbereich in verschiedene Teile aufzuspalten.

Aufgabe 2 - Elektromagnetischen Wellen und Interferenz (28 Punkte)

(a) Bestimme $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)$ und $\vec{B}\left(\vec{r},t\right)$ für eine elektromagnetische Welle im Vakuum mit Wellenzahl $\left|\vec{k}\right| = k$ und Frequenz ω für die folgenden Fälle. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke sei E_0 und zusätzlich gilt:

(i) Die Welle ist linear polarisiert und breitet sich in positive x-Richtung aus, wobei $\vec{E}\left(\vec{0},0\right)$ in positive z-Richtung zeigt.

(ii) Die Welle ist linear polarisiert und breitet sich in positive x-Richtung aus, wobei $\vec{E}\left(\vec{0},0\right)$ in positive y-Richtung zeigt.

(iii) Die Welle ist linear polarisiert und breitet sich in positive x-Richtung aus, wobei $\vec{E}\left(\vec{0},0\right)$ in negative z-Richtung zeigt.

(iv) Die Welle ist rechtszirkular polarisiert und breitet sich in positive z-Richtung aus, wobei $\vec{E}\left(\vec{0},0\right)$ in positive x-Richtung zeigt.
Hinweis: Rechtszirkulare Polarisation bedeutet, dass sich in einer beliebigen festen Ebene senkrecht zum Ausbreitungsvektor das elektrische Feld sich mit anwachsender Zeit im Uhrzeigersinn bewegt falls man in Richtung der Ausbreitungsrichtung blickt.

(v) Die Welle ist linkszirkular polarisiert und breitet sich in positive z-Richtung aus, wobei $\vec{E}\left(\vec{0},0\right)$ in positive x-Richtung zeigt.

(b) Skizziere den Vektor des elektrischen und magnetischen Feldes in der yz-Ebene für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$ mit $n = 0, 1, \ldots, 8$ für die elektromagnetische Welle aus Aufgabe $(a)\,(i)$.

(c) Skizziere den Vektor des elektrischen und magnetischen Feldes in der xy-Ebene für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$ mit $n = 0, 1, \ldots, 8$ für die elektromagnetische Welle aus Aufgabe $(a)\,(iv)$.

(d) Beschreibe Intensität, Ausbreitungsrichtung und Polarisation folgender elektromagnetische Wellen. Begründe deine Antworten anschaulich und/oder mit Hilfe einer kurzen Rechnung!

(i) Eine Superposition der Wellen aus Aufgabe $(a)\,(i)$ und $(a)\,(ii)$.
(ii) Eine Superposition der Wellen aus Aufgabe $(a)\,(i)$ und $(a)\,(iii)$.
(iii) Eine Superposition der Wellen aus Aufgabe $(a)\,(iv)$ und $(a)\,(v)$.

Aufgabe 3 - Teilchen in elektromagnetischer Welle (12 Punkte + 10 Zusatzpunkte)

Betrachte eine elektromagnetische Welle im Vakuum welche durch folgendes elektrisches Feld beschrieben wird,

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = E_0 \cos\left(kz - \omega t\right) \hat{e}_x + E_0 \sin\left(kz - \omega t\right) \hat{e}_y \,.$$

(a) Bestimme das magneterische Feld, die Ausbreitungsrichtung sowie die Polarisation dieser Welle.

(b) Bestimme die Bewegungsgleichung eines Punktteilches mit Ladung q und Masse m im elektromagnetischen Feld dieser Welle mit Hilfe der Lorentz-Kraft. Zeige, dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Teilchens durch den Ausdruck

$$\dot{T} = q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{E}$$

gegeben ist.
Hinweis: Wir vernachlässigen relativistische Effekte sowie die Emission von Strahlung durch die bewegte Ladung, das heißt $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort durch die Felder der Welle bestimmt und es gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung. Die Relation $\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right)$ kann nützlich sein um die Herleitung der Bewegungsgleichung zu vereinfachen. Das Resultat lautet

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{q}{m} E_0 \left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right) \cos\left(kz - \omega t\right) \,, \\
\ddot{y} &= \frac{q}{m} E_0 \left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right) \sin\left(kz - \omega t\right) \,, \\
\ddot{z} &= \frac{q}{mc} \left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{E}\right) \,.
\end{aligned}$$

(c) *Zusatzaufgabe: Betrachte die Randbedingungen $\vec{r}\left(t=0\right) = \vec{0}$ sowie $\dot{\vec{r}}\left(t=0\right) = \vec{v}_0$. Bestimme $\vec{v}_0$, sodass die kinetische Energie des Teilchens zu jedem Zeitpunkt konstant bleibt. Bestimme anschließend die Bahnkurve des Teilchens mit den Randbedingungen aus Teilaufgabe (c). Zeige, dass sich die Bahnkurve in der xy-Ebene in der Form*

$$\left(x\left(t\right) - R\right)^2 + \left(y\left(t\right)\right)^2 = R^2$$

für ein geeignetes R schreiben lässt. Welche Bahn beschreibt diese Gleichung?