Übungszettel 2 - Ladungsverteilungen (Abgabetermin: 29.10.2014)

Aufgabe 1 - Singuläre Ladungsverteilung (8 Punkte)

(a) Skizziere das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{x_i}{|\vec{r}|^3}\hat{e}_i$ in der x, y-Ebene.

(b) Berechne die Divergenz von $\vec{E}(\vec{r})$. Deckt sich das Ergebnis mit deiner Skizze aus Teilaufgabe (a)? Welche Ladungsverteilung ruft solch ein elektrisches Feld hervor?

Aufgabe 2 - Konstante Ladungsverteilung (14 Punkte)

(a) Das Potential für eine konstante Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ lässt sich als quadratische Funktion schreiben,

$$\Phi(\vec{r}) = a_0 + \vec{b}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot C\cdot\vec{r}, \tag{1}$$

für einen Skalar a_0, einen Vektor $\vec{b}$ und eine Matrix C. Bestimme die Zahl der freien skalaren Parameter in Gleichung (1) und stelle eine Bedingung für die Matrix C auf, sodass $\Phi(\vec{r})$ einer konstanten Ladungsverteilung mit Dichte ρ_0 entspricht. Schreibe ein explizites Beispiel für solch ein Potential auf.

(b) Begründe ohne Rechnung mit Hilfe von Gleichung (1), warum sich das elektrische Feld für eine konstante Ladungsverteilung als affin lineare Funktion schreiben lässt, also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 + M\cdot\vec{r}$$

für einen Vektor $\vec{E}_0$ und eine Matrix M. Zeige, dass aus der Wirbelfreiheit von $\vec{E}(\vec{r})$ folgt, dass M eine symmetrische Matrix sein muss. In Teilaufgabe (a) hast du aber solch eine Einschränkung für die Matrix C (hoffentlich) nicht erhalten. Hat sich Maxwell mit seiner Gleichung $\operatorname{rot}\left(\vec{E}\right) = \vec{0}$ in der Elektrostatik geirrt oder kannst du den Widerspruch zwischen symmetrischem M und nicht-symmetrischem C aufklären?

(c) Bestimme die Extrema für die allgemeine Form von $\Phi(\vec{r})$ aus Teilaufgabe (a) für den Spezialfall $\rho_0 = 0$.

Aufgabe 3 - Einfache Ladungsverteilungen (14 Punkte)

(a) Betrachte eine homogen geladene Platte mit negativer Ladung in der x, y-Ebene. In welche Richtung zeigt die Kraft, die diese Platte auf eine negative Punktladung am Punkt (x, y, z) mit $z \neq 0$ ausübt.

(b) Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge L an dessen Ecken sich jeweils eine Punktladung q befindet. Bestimme die Kraft auf eine Punktladung Q im Mittelpunkt des Würfels. Entferne eine Ladung an einem Eckpunkt deiner Wahl. Wie lautet nun die Kraft auf eine Punktladung Q im Würfelmittelpunkt?

(c) Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge L an dessen Ecken und Flächenmittelpunkten sich jeweils eine Punktladung q befindet. Bestimme die Kraft auf eine Punktladung Q im Mittelpunkt des Würfels. Entferne nun eine Ladung an einem Eckpunkt deiner Wahl und eine Ladung an einem Flächenmittelpunkten deiner Wahl. Wie lautet nun die Kraft auf eine Punktladung Q im Würfelmittelpunkt?

(d) Betrachte das homogen geladene Objekt $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = R^2\right\}$ wobei $R > 0$ sei. Die Gesamtladung des Objekts sei q. Welche Einheit sollte eine Größe haben, welche die Ladungsdichte dieses Objekts beschreibt? Skizziere das Objekt zusammen mit einer Punktladung Q am Ort $(b, 0, 0)$ und bestimme die Kraft welche von dem Objekt auf die Punktladung ausgeübt wird.

Aufgabe 4 - Nicht ganz so einfache Ladungsverteilungen (24 Punkte)

(a) Skizziere die Ladungsverteilung
$$\rho(\vec{r}) = \lambda \cdot \chi_{[-L,L]}(x)\,\delta(y)\,\delta(z),$$
wobei $\chi_{[-L,L]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [-L, L] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist. λ ist eine Konstante.

(b) Bestimme das elektrische Feld auf der z-Achse für die Ladungsverteilung aus Teilaufgabe (a) wobei die Gesamtladung Q sei.
Hinweis: Während deiner Rechnung wird ein Integral der Form
$$\int \frac{1}{(x^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$
auftauchen. Berechne das Integral durch Substitution von $x = \alpha \tan \xi$*. Anschließend wirst du auf den Ausdruck* $\sin(\arctan(x))$ *treffen. Zeige, um diesen Ausdruck zu vereinfachen, dass* $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.

(c) Skizziere die Ladungsverteilung
$$\rho(\vec{r}) = \lambda \cdot \chi_{[-L,L]}(x)\,\delta(|y|-L)\,\delta(z) + \lambda \cdot \delta(|x|-L)\,\chi_{[-L,L]}(y)\,\delta(z),$$
wobei λ eine Konstante ist.
Hinweis: Es gilt $\delta(|x|-a) = \delta(x-a) + \delta(-x-a)$.

(d) Bestimme das elektrische Feld auf der z-Achse für die Ladungsverteilung aus Teilaufgabe (c), wobei die Gesamtladung Q sei.