Übungszettel 3 - Mehr Ladungsverteilungen und Gauß
(Abgabetermin: 05.11.2014)

Aufgabe 1 - Kreisförmige Ladungsverteilung (10 Punkte)

(a) Bestimme die räumliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ eines homogen geladenen Kreisrings in der x, y-Ebene mit Mittelpunkt bei $(0, 0, 0)$, Radius R und Gesamtladung Q.

(b) Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}_K(\vec{r})$ auf der z-Achse für die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$.

(c) Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}_{VK}(\vec{r})$ auf der z-Achse für einen homogen geladenen Vollkreis in der x, y-Ebene mit Mittelpunkt bei $(0, 0, 0)$, Flächenladungsdichte σ und Radius R_0 (dies entspricht der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(z)\,\theta(R_0 - \rho)$) mit Hilfe deines Ergebnisses aus Teilaufgabe (b). Was passiert für $R_0 \to \infty$?
Hinweis: Die Flächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma = \frac{dQ}{dA} \iff dQ = \sigma dA$ *wobei* $dA = 2\pi R dR$ *in Bezug auf die Kreisringe mit Radius* R *aus Teilaufgabe* (a) *gilt. Wenn* $d\vec{E}_K$ *dann das differentielle elektrische Feld eines Kreisrings aus Teilaufgabe* (b) *ist, so gilt für das elektrische Feld des Vollkreises* $\vec{E}_{VK} = \int d\vec{E}_K = \int \frac{d\vec{E}_K}{dQ} dQ = \int \frac{d\vec{E}_K}{dQ} \sigma dA$.

Aufgabe 2 - Volumen- und Oberflächenintegrale (28 Punkte)

(a) Skizziere folgende Punktmengen für $R > 0$ und $L > 0$,

(i) $V_1 = \left\{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$,

(ii) $V_2 = \left\{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq L\right\}$,

(iii) $V_3 = \left\{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \max(|x|, |y|, |z|) \leq L\right\}$.

(b) Berechne explizit (ohne den Satz von Gauß zu benutzen) die Oberflächenintegrale $\oint_{\partial V_i} \vec{g}_j(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ für die drei Punktmengen aus Teilaufgabe (a) und die beiden Vektorfelder $\vec{g}_1(\vec{r}) = \vec{r}$ und $\vec{g}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.
Hinweis: Die folgenden Relationen sind hilfreich,

$$\int \frac{1}{(\alpha^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt = \frac{t}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2 + t^2}},$$

$$\int \frac{1}{(\alpha^2 + t^2)\sqrt{2\alpha^2 + t^2}}\, dt = \frac{1}{\alpha^2} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2\alpha^2 + t^2}}\right), \quad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

(c) Berechne explizit (ohne den Satz von Gauß zu benutzen) die Volumenintegrale $\int_{V_i} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_j(\vec{r})\right) d^3r$ für die drei Punktmengen aus Teilaufgabe (a) und die beiden Vektorfelder aus Teilaufgabe (b).

Aufgabe 3 - Gauß I (12 Punkte)

(a) Betrachte die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(x)$$

für $\sigma > 0$. Was für ein Objekt repräsentiert diese Ladungsverteilung?

(b) Bestimme das elektrische Feld der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ für $x \neq 0$. Skizziere die x-Komponente des elektrischen Feldes für $x \neq 0$.

(c) Skizziere das elektrostatische Potential der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ für $x \neq 0$.

Aufgabe 4 - Gauß II (10 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Betrachte die Ladungsverteilung

$$\rho\left(\vec{r}\right) = q\delta\left(\vec{r}\right) - \frac{q}{4\pi} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^2}{r}$$

mit $r = |\vec{r}|$ für $\alpha > 0$ und $q > 0$.

(a) Bestimme die Gesamtladung der Ladungsverteilung $\rho\left(\vec{r}\right)$. Was für ein physikalisches Objekt könnte diese Ladungsverteilung repräsentieren?

(b) Bestimme das elektrische Feld für die Ladungsverteilung $\rho\left(\vec{r}\right)$.

(c) `Zusatzaufgabe`: Bestimme das elektrostatische Potential für die Ladungsverteilung $\rho\left(\vec{r}\right)$.
Hinweis: Benutze eine nicht ganz offensichtliche partielle Integration.