Übungszettel 4 - Ein Ellipsoid, zwei Drähte und drei Punkte (Abgabetermin: 05.11.2014)

Aufgabe 1 - Drei Punktladungen (10 Punkte)

Betrachte eine Ladungsverteilung, die aus einer Punktladung (Ladung q) am Ort $(0,0,a)$ und zwei weiteren Punktladungen (jeweils Ladung $-q$) an den Orten $(0,\pm a,0)$ besteht.

(a) Bestimme das Potential $\Phi(\vec{r})$ für große Abstände $|\vec{r}| \gg |a|$ bis zur zweiten Ordnung (der Term $\sim \frac{1}{r}$ ist die nullte Ordnung).

(b) Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für große Abstände $|\vec{r}| \gg |a|$ bis zur ersten Ordnung.

Aufgabe 2 - Elliptische Ladungsverteilung (20 Punkte)

(a) Skizziere die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0, & \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $a, b > 0$.

(b) Wir führen elliptische Koordinaten (r,θ,φ) mit den Parametern $\alpha,\beta,\gamma > 0$ ein,

$$\begin{aligned} x &= \alpha r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= \beta r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= \gamma r \cos\theta. \end{aligned}$$

Zeige, dass das Volumenelement in elliptischen Koordinaten sich als

$$dV = \alpha\beta\gamma r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

schreiben lässt.
Hinweis: Das Volumenelement ist gegeben durch die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation, also

$$dV = |\det J| \, dr d\theta d\varphi,$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

(c) Finde eine Wahl für den Parametersatz (α,β,γ), sodass sich die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in besonders einfacher Form in den elliptischen Koordinaten schreiben lässt.

(d) Bestimme das Dipolmoment und das Quadrupolmoment der Ladungsverteilung aus Teilaufgabe (a). Was passiert für $a = b$ und warum?
Hinweis: Folgendes Integral ist hilfreich,

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \; d\theta = \frac{4}{3}.$$

Aufgabe 3 - Zwei Drähte (30 Punkte)

(a) Bestimme die räumliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ für zwei parallele, unendlich lange Drähte im Abstand $2a$ mit $a > 0$ wie unten in Abbildung 1 gezeigt.

(b) Zeige, dass sich das Potential $\Phi(\vec{r})$ unter der Randbedingung $\Phi\left(\vec{0}\right) = 0$ (überprüfe dies!) folgendermaßen schreiben lässt,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(y+a)^2 + z^2}{(y-a)^2 + z^2}\right).$$

Benutze dazu ...

(i) ... den Satz von Gauß in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: Betrachte zunächst das Potential eines einzelnen Drahtes entlang der x-Achse und benutze dem Koordinatensystem angepasste Zylinderkoordinaten.

(ii) ... die Formel $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$ und integriere in kartesischen Koordinaten.
Hinweis: Substituiere mit dem Sinushyperbolicus. Benutze die hypertrigonometrische Identität $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. *Es ist hilfreich, das unbestimmte Integral in x-Richtung $\int_{-\infty}^{\infty} \dots\, dx$ zunächst als Grenzwert $\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \dots\, dx$ zu schreiben. Benutze dann die Identität* $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ *und erinnere dich an die Logarithmusgesetze!*

(c) Zeige, dass die Äquipotentialflächen $\{\vec{r} \in \mathbb{R} :\ \Phi(\vec{r}) = \Phi_0\}$ folgende Gleichung erfüllen,

$$(y - \sigma a)^2 + z^2 = \left(\sigma^2 - 1\right) a^2,$$

wobei $\sigma = \frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1}$ und $\kappa^2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0\Phi_0}{\lambda}}$. Was für geometrische Objekte sind die Äquipotentialflächen? Skizziere eine Äquipotentialfläche für $\Phi_0 \neq 0$ sowie die Äquipotentialfläche für $\Phi_0 = 0$.

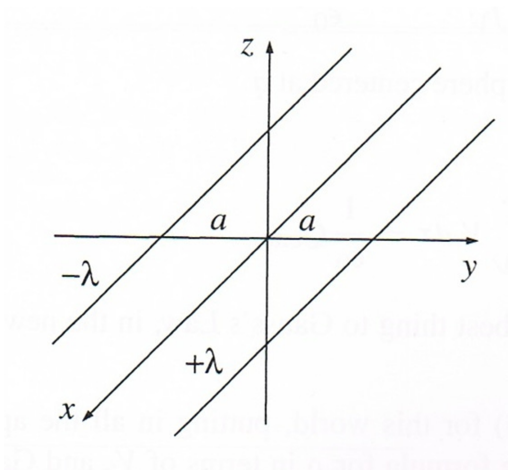

Abbildung 1: Zwei Drähte