Übungszettel 6 - Orthonormalbasen des L^2 (Abgabetermin: 26.11.2014)

Aufgabe 1 - L^2 und seine Orthonomalbasen I (28 Punkte)

Für zwei Funktionen $f, g : [-1, 1] \mapsto \mathbb{C}$ definiert man ein Skalarprodukt über

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f^* (x)\, g (x) \; dx, \tag{1}$$

woraus sich die Norm einer Funktion zu $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ergibt. Der Raum der Funktionen $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{C}$ mit $\|f\| < \infty$ wird $L^2 ([-1, 1])$ genannt.

(a) Zeige, dass Gleichung (1) tatsächlich ein (komplexes) Skalarprodukt definiert. Dazu musst du folgende Bedingungen zeigen:

(i) $\forall f, g, h \in L^2 ([-1, 1]) : \; \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$,
(ii) $\forall f, g \in L^2 ([-1, 1]) , \lambda \in \mathbb{C} : \; \langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$,
(iii) $\forall f, g \in L^2 ([-1, 1]) : \; \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$,
(iv) $\forall f \in L^2 ([-1, 1]) : \; \langle f, f \rangle \geq 0$,
(v) $\forall f \in L^2 ([-1, 1]) : \; \langle f, f \rangle = 0 \Longleftrightarrow f (x) = 0$.

(b) Nach dem ersten Approximationssatz von Weierstrass kann man jede Funktion auf einem kompakten Intervall (wie z.B. $[-1, 1]$) durch eine Linearkombination von Polynomen approximieren. Das heißt, dass Polynome dicht in $L^2 ([-1, 1])$ liegen, also kann man insbesondere vollständige Orthonormalbasen des L^2 aus Polynomfunktionen erzeugen. Der einfachste Versuch wäre die Monome $p_n (x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ anzusetzen. Man würde dann erwarten eine beliebigen Funktion $f \in L ([0, 1])$ folgendermaßen schreiben zu können,

$$f (x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n (x) . \tag{2}$$

Finde einen Ausdruck für die c_n mit Hilfe der Taylorreihe. Gib die ersten 4 Koeffizieten für die Funktion $f (x) = \sin (\pi x)$ an.

(c) Falls die Monome eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2 ([0, 1])$ sind, dann sollten sich die Koeffizieten aus Gleichung (2) über folgende Gleichung bestimmen lassen,

$$c_n = \langle p_n, f \rangle . \tag{3}$$

Bestimme die ersten vier Koeffizienten c_n für die Funktion $f (x) = \sin (\pi x)$ mit Formel (3). Dein Ergebnis wird sich nicht mit den Koeffizienten aus Teilaufgabe (b) decken. Warum nicht?
Hinweis: Es gilt

$$\int_{-1}^{1} x \sin (\pi x) \; dx = \frac{2}{\pi}, \qquad \int_{-1}^{1} x^3 \sin (\pi x) \; dx = \frac{2}{\pi} - \frac{12}{\pi^3}.$$

(d) Wir können aus den Monomen p_n ein Orthonormalsystem erhalten, indem wir das sogenannte Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Nach diesem Verfahren bilden die Funktionen Q_n ein Orthonormalsystem wobei

$$Q_0 = \frac{p_0}{\sqrt{\langle p_0, p_0 \rangle}}, \quad \forall n \neq 0 : \; Q_n \;\; = \;\; \frac{\tilde{Q}_n}{\sqrt{\left\langle \tilde{Q}_n, \tilde{Q}_n \right\rangle}}, \quad \tilde{Q}_n = p_n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle p_n, Q_i \rangle Q_i.$$

Bestimme die ersten vier Q_n und zeige, dass sie die Gleichung $Q_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$ erfüllen wobei P_n die aus der Vorlesung bekannten Legendre-Polynome sind.

(e) Die normierten Legendre-Polynome Q_n sind also eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2 ([-1, 1])$. Das heißt, wir können jede Funktion $f \in L ([0, 1])$ folgendermaßen schreiben,

$$f (x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n Q_n (x) ,$$

wobei $\alpha_n = \langle Q_n, f \rangle$. Bestimme die ersten vier Koeffizienten α_n für die Funktion $f (x) = \sin (\pi x)$. Skizziere die Funktion $f (x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ zusammen mit den Funktionen $F_N (x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n Q_n (x)$ für $N = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 2 - L^2 und seine Orthonomalbasen II (22 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Wir betrachten in dieser Teilaufgabe den Raum $L^2([0,2\pi])$. Die Definition des Skalarprodukts ist analog zu Aufgabe 1, beachte lediglich, dass die Integration nun von 0 bis 2π an Stelle von -1 bis 1 geht.

(a) Zeige, dass die Menge von Funktionen $A = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N},n\neq 0} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N},n\neq 0}$ ein orthonormales System in $L^2([0,2\pi])$ bildet.
Hinweis: Benutze die Additionstheoreme $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$, $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)]$ *und* $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$.

(b) Zeige, dass die Menge von Funktionen $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ein orthonormales System in $L^2([0,2\pi])$ bildet.

(c) Nach dem zweiten Approximationssatz von Weierstrass ist A vollständig in $L^2([0,2\pi])$. Schlussfolgere, dass damit auch B eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2([0,2\pi])$ ist.
Hinweis: Zeige dazu, dass sich jedes Element von A als (komplexe) Linearkombination von Elementen von B schreiben lässt.

(d) Bestimme die Koeffizieten c_n für $n\in\mathbb{Z}, -3\leq n\leq 3$ für die Darstellung der Funktion $f(x) = x$ in Bezug auf die Basis B, also

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n e^{inx}.$$

Skizziere die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0,2\pi]$ zusammen mit den Funktionen $F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n e^{inx}$ für $N = 0,1,2,3$.

(e) *Zusatzaufgabe: Plotte die Funktionen* $F_N(x)$ *für* $N = 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$. *Was beobachtest du am Rand des Definitionsbereichs?*

Aufgabe 3 - L^2 und seine Orthonomalbasen III (10 Punkte)

Die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ nennt man oft S. Man kann sie über die Winkel $\theta = [0,\pi]$ und $\varphi\in[0,2\pi]$ in Kugelkoordinaten parametrisieren. Funktionen auf der Einheitskugel lassen sich dann als $f(\theta,\varphi)$ schreiben. Der Raum $L^2(S)$ trägt in Analogie zum Winkelintegral in Kugelkoordinaten das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^*(\theta,\varphi)\, g(\theta,\varphi)\, \sin\theta d\theta d\varphi.$$

(a) Zeige, dass die Funktionen

$$Z_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Q_l(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

für $l\in\mathbb{N}_0$ und $m\in\mathbb{Z}$ eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2(S)$ bilden, wobei die Q_l die normierten Legendre-Polynome aus Aufgabe 1 sind.
Hinweis: Benutze die Beobachtungen aus Aufgabe (1e) *sowie* (2c). *Für die Vollständigkeit erwartet man*

$$\sum_{lm} Z_{lm}(\theta,\varphi)\, Z^*_{lm}(\theta',\varphi') \sim \delta(\cos(\theta)-\cos(\theta'))\, \delta(\varphi-\varphi').$$

(b) Es gibt noch eine alternative Wahl für eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2(S)$. Dazu definiert man die zugeordneten Legendre-Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$,

$$m\geq 0:\ P_l^m(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m}(P_l(x)), \qquad m<0:\ P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x),$$

für $m\in\mathbb{Z}$ und $l\in\mathbb{N}_0$. Man kann zeigen, dass sie für jedes m einen vollständigen orthonormalen Satz von Funktionen auf $L^2([-1,1])$ bilden, solange man die Fälle ausschließt in denen $P_l^m(x)$ zur Nullfunktion wird. Wie lautet die Bedingung für l sodass bei gegebenen m die $P_l^m(x)$ nicht zur Nullfunktion werden? Schlussfolgere, dass daraus folgt, dass die Kugelflächenfunktionen,

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi},$$

für $l\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}, m\leq |l|$ ein vollständiges orthogonales System des $L^2(S)$ bilden (Normierung ist auch erfüllt, aber das muss nicht gezeigt werden).