Übungszettel 7 - Kugelkoordinaten und Kondensatoren (Abgabetermin: 03.12.2014)

Aufgabe 1 - Sphärische Multipolentwicklung (16 Punkte)

Es seien zwei Vektoren $\vec{r}, \vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ durch ihre Kugelkoordinaten (r, θ, φ) bzw. (r', θ', φ') gegeben. Falls $r > r'$ gilt folgende Identität durch Entwicklung in Kugelflächenfunktionen Y_{lm},

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^* (\theta', \varphi') \, Y_{lm} (\theta, \varphi) \, .$$

(a) Zeige, dass sich die Multipolentwicklung im Fernfeld des Potentials einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ in Kugelkoordinaten folgendermaßen schreiben läßt,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \, . \tag{1}$$

Gib dazu einen allgemeinen Ausdruck für die Koeffizienten q_{lm} in Abhängigkeit der Ladungsverteilung an. Welche Terme der Doppelsumme über m und l tragen zur jeweiligen n-ten Ordnung der Multipolentwicklung bei? Begründe deine Antwort!

(b) Notiere die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten explizit bis zur ersten Ordnung für eine allgemeine Ladungsverteilung in Abhängigkeit der entsprechenden sphärischen Multipolmomente q_{lm}.

(c) Drücke $q_{0,0}, q_{1,0}, q_{1,1}$ und $q_{1,-1}$ durch die Gesamtladung Q und die (kartesischen) Komponenten des Dipolmoments $\vec{p}$ aus.

Aufgabe 2 - Doppelpunkt (16 Punkte)

Betrachte eine Punktladung am Ort $(0, 0, a)$ mit Ladung q sowie eine Punktladung am Ort $(0, 0, -a)$ mit Ladung $-q$.

(a) Zeige, dass sich die sphärischen Multipolmomente (siehe Gleichung (1)) dieser Ladungsverteilung folgendermaßen schreiben lassen,

$$q_{lm} = \begin{cases} 0, & l \text{ gerade,} \\ 2\delta_{m0}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, q a^l, & l \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Hinweis: Benutze folgende Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen bzw. zugeordneten Legendre-Polynome: 1) $Y_{lm}(0,0) \sim P_l^m(1)$ sowie $Y_{lm}(\pi, 0) \sim P_l^m(-1)$, 2) $\forall m : P_l^m$ ist gerade wenn l gerade und ungerade sonst, 3) $P_l^m(1) = \delta_{m0}$. Beachte, dass sich die Delta-Funktion in Kugelkoordinaten folgendermaßen schreibt,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \delta(r - r') \, \delta(\theta - \theta') \, \delta(\varphi - \varphi') \, .$$

(b) Zeige, dass sich das Potential in Kugelkoordinaten für $r > a$ folgendermaßen schreiben lässt,

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^{(2l-1)}}{r^{2l}} P_{(2l-1)}(\cos\theta) \, . \tag{2}$$

(c) Bestimme das Potential für den Fall $a \to 0, q \to \infty$, sodass $qa \equiv \frac{p}{2} =$ const., mit Hilfe von Gleichung (2). Was für ein Objekt beschreibt dieses Potential?

Aufgabe 3 - Kondensatoren und Dielektrika I (14 Punkte)

Betrachte zwei parallele, leitende Platten mit Fläche A und Abstand d wie unten in Abbildung 1 gezeigt. Der Raum zwischen den Platten ist mit einem anisotropen homogenen Dielektrikum gefüllt. Der Dielektrizitätstensor ϵ_{ij} ist diagonal in Bezug auf die Achsen in Richtung von E_1, E_2 und E_3 (nicht gezeigt, orthogonal zur Zeichenebene) mit Eigenwerten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Wir vernachlässigen in dieser Aufgabe Randeffekte aufgrund der endlichen Ausdehnung der Platten.

(a) Die Platten tragen jeweils die freie Ladung Q_F bzw. $-Q_F$. Bestimme den Betrag der normalen und tangentiale Komponente des elektrischen Feldes $\vec{E}$ sowie der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$.
Hinweis: Benutze den allgemeinen Zusammenhang $D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$ *und beachte die Diagonalität von* ϵ_{ij} *in der entsprechenden Basis. Benutze außerdem die Randbedingungen von* $\vec{E}$ *und* $\vec{D}$ *an einer Leitergrenzfläche.*

(b) Zeige, dass die Kapazität des Kondensators durch folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$C = \frac{A\left(\epsilon_1 \cos^2\theta + \epsilon_2 \sin^2\theta\right)}{d}.$$

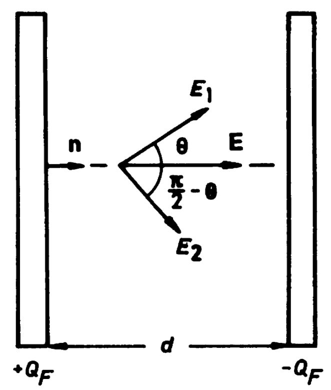

Abbildung 1: Geladener Kondensator mit Dielektrikum

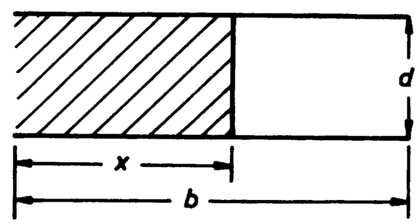

Abbildung 2: Kondensator, teilweise mit Dielektrikum

Aufgabe 4 - Kondensatoren und Dielektrika II (14 Punkte)

Betrachte zwei parallele leitende rechteckige Platten mit Seitenlängen a und b und Abstand d wie oben in Abbildung 2 im Querschnitt gezeigt. Ein Teil des Zwischenraums zwischen den Platten mit Länge x (entlang der Seite mit Länge b) sei mit einer isotropen homogenen dielektrischen Flüssigkeit mit Dichte ϱ und Dielektrizitätszahl ϵ gefüllt.

(a) Berechne die Kapazität dieses Kondensators.
Hinweis: Die Kapazität ist additiv, wenn man Teilstücke des Kondensators betrachtet.

(b) Die Kondensatorplatten des Kondensators seien jeweils mit einer Gesamtladung Q bzw. $-Q$ geladen. Berechne die Kraft auf das Dielektrikum in Abhängigkeit der Potentialdifferenz der Platten V.
Hinweis: Die Energie des Kondensators ist durch $E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ *gegeben. Vergiss nicht, die Richtung der Kraft anzugeben!*

(c) Der Kondensator sei nun aufrecht (mit der linken Seite aus Abbildung 2 "unten" und der rechten Seite "oben") über einem Reservoir des flüssigen Dielektrikums positioniert, sodass der Kondensator teilweise in die Flüssigkeit eintaucht. Wie hoch steigt die Flüssigkeit (relativ zum Ausgangspegel des Dielektrikums im Kondensator x_0) wenn der Kondensator mit einer Batterie mit Spannung V verbunden wird? Welche Arbeit wird von der Batterie verrichtet?
Hinweis: Wir nehmen an, dass b groß genug ist, um eine hinreichend große Menge des Dielektrikums im Kondensator zu halten. Bezeichne die Erdbeschleunigung mit g.