Übungszettel 8 - Magnetostatik (Abgabetermin: 10.12.2014)

Aufgabe 1 - Einfache Ströme (16 Punkte)

(a) Skizziere einen Draht, welcher die Stromdichte in Zylinderkoordinaten $\vec{j}\,(\rho,\varphi,z) = \frac{I}{2\pi R}\delta\,(\rho-R)\,\delta\,(z)\,\hat{e}_\varphi$ hervorruft, wobei $I, R > 0$.

(b) Bestimme das Magnetfeld $\vec{B}\,(z)$ auf der z-Achse mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes,

$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\;\vec{j}\,(\vec{r}\,')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}.$$

(c) Skizziere einen oder mehrere Drähte, welche die Stromdichte in Zylinderkoordinaten

$$\vec{j}\,(\rho,\varphi,z) = \frac{I}{2\pi R}\left(\delta\,(\rho-R)\,\delta\,(z-a)+\delta\,(\rho-R)\,\delta\,(z+a)\right)\hat{e}_\varphi$$

hervorrufen, wobei $I, R > 0$.

(d) Berechne das Magnetfeld $\vec{B}\,(z)$ auf der z-Achse für die Stromverteilung aus Teilaufgabe (c). Zeige, dass $\forall a : \left.\frac{\partial|\vec{B}|}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$ und bestimme a, sodass $\left.\frac{\partial^2|\vec{B}|}{\partial z^2}\right|_{z=0} = 0$. Warum könnte solch ein Verhalten des $\vec{B}$-Feldes in der Praxis nützlich sein?

Aufgabe 2 - Randbedingungen der Magnetostatik (12 Punkte)

(a) Betrachte eine leitende Oberfläche mit einer Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r}) = \vec{K}\,(x,y)\,\delta\,(z)$, wobei $\vec{K}\,(x,y)$ ein beliebiger Oberflächenstrom sei. Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\vec{B}\,(x,y,z>0)-\vec{B}\,(x,y,z<0) = \mu_0\left(\vec{K}\,(x,y)\times\hat{e}_z\right). \tag{1}$$

Hinweis: Benutze die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik und integriere über einen infinitesimalen Gauß-Kasten, bzw. zwei infinitesimale Ampère-Schleifen (jeweils parallel und orthogonal zu $\vec{K}$ ausgerichtet).

(b) Betrachte erneut die leitende Oberfläche aus Teilaufgabe (a), nun ist aber der Raum oberhalb und unterhalb der Oberfläche mit magnetischen Materialien gefüllt. Ändert sich Gleichung (1) in diesem Szenario? Wenn ja, wie? Zeige außerdem, dass für das $\vec{H}$-Feld folgende Relation $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt,

$$\vec{H}\,(x,y,z>0)-\vec{H}\,(x,y,z<0) = \mu_0\left(\vec{K}_f\,(x,y)\times\hat{e}_z\right)-\left(M_z\,(x,y,z>0)-M_z\,(x,y,z<0)\right)\cdot\hat{e}_z,$$

wobei $\vec{K}_f$ der freie Oberflächenstrom und $\vec{M}$ die Magnetisierung ist.
Hinweis: Benutze die beiden Relationen

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M},$$

wobei $\vec{J}_f$ die freie Stromdichte ist.

Aufgabe 3 - Magnetostatik mit Symmetrie und Stokes (32 Punkte)

Benutze den Satz von Stokes um das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ folgender Ladungsverteilungen zu berechnen. Fertige jeweils eine Skizze an und begründe explizit die Richtung und Symmetrieeigenschaften des Magnetfeldes, bevor du anfängst zu rechnen. Betrachte ...

(a) ... einen unendlich ausgedehnter kreisförmiger Hohlzylinder in z-Richtung mit Radius R, welcher von einem homogenen Strom I in positive z-Richtung durchflossen wird.
Anleitung:

- *Benutze ein Symmetrieargument, um zu zeigen, dass* $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho)$.
- *Schlussfolgere* $B_z(\vec{r}) = 0$ *mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes.*
- *Begründe warum eine Umkehrung des Stromflusses identisch mit einer Spiegelung des Problems an der* x, y*-Ebene ist. Begründe, warum daraus die Bedingung* $B_\rho(\vec{r}) = -B_\rho(\vec{r})$ *folgt.*
- *Bestimme* $B_\varphi(\vec{r})$ *mit dem Satz von Stokes, wobei du ein kreisförmiges Integrationsgebiet verwenden solltest.*

(b) ... einen unendlich ausgedehnter kreisförmiger Vollzylinder in z-Richtung mit Radius R, welcher von einem Gesamtstrom I in positive z-Richtung durchflossen wird, wobei der Betrag der Stromdichte $\left|\vec{j}\right|$ proportional zum Abstand von der z-Achse ist.

(c) ... die Ladungsveteilung $\vec{j}(\vec{r}) = K\hat{e}_x\chi_{[-a,a]}(z)$, wobei $K > 0$.
Anleitung:

- *Benutze ein Symmetrieargument, um zu zeigen, dass* $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(z)$.
- *Benutze ähnliche Argumente wie bei Teilaufgabe (a), um zu zeigen, dass* $B_x(\vec{r}) = B_z(\vec{r}) = 0$.
- *Begründe, warum* $\vec{B}(z > 0)$ *und* $\vec{B}(z < 0)$ *in entgegengesetzte Richtung zeigen müssen. Dazu sollte der Satz von Stokes mit einem rechteckigen Integrationsgebiet verwendet werden. Schlussfolgere, dass* $\vec{B}(z = 0) = \vec{0}$.
- *Bestimme* $B_y(\vec{r})$ *mit dem Satz von Stokes, wobei ein Integrationsgebiet verwendet werden sollte, was explizit die Relation* $\vec{B}(z = 0) = \vec{0}$ *ausnutzt.*

(d) ... zwei ideale, kreisförmige Spulen entlang der z-Richtung mit Radien r_1, r_2 wobei $r_1 < r_2$. Der Strom durch die beiden Spulen sei I, verlaufe aber für die Spule mit kleinerem Radius in negative $\hat{e}_\varphi$-Richtung und für jene mit größerem Radius in positive $\hat{e}_\varphi$-Richtu ,ng. Die Windungsdichte der inneren Spule sei $\frac{n_1}{L}$ und die Windungsdichte der äußeren Spule sei $\frac{n_2}{L}$. Wir gehen davon aus, dass in guter Näherung die Komponente des Stroms in z-Richtung an jedem Punkt vernachlässigbar ist (dichte Windung der Spulen).
Hinweis: Gehe analog vor, wie bei den vorherigen Teilaufgaben! Du kannst davon ausgehen, dass $\vec{B}(\rho \to \infty) = \vec{0}$.