Übungszettel 9 - Einfache Elektrodynamik (Abgabetermin: 17.12.2014)

Aufgabe 1 - Rotierende Hohlkugel I (22 Punkte)

Betrachte eine Hohlkugel im Vakuum mit Radius R und homogener Oberflächenladungsdichte σ, welche mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ rotiert. Das Vektorpotential dieser Anordung ist durch folgenden Ausdruck gegeben,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R\sigma}{3}(\vec{\omega}\times\vec{r}), & r \le R \\ \frac{\mu_0 R^4\sigma}{3r^3}(\vec{\omega}\times\vec{r}), & r \ge R \end{cases}. \tag{1}$$

(a) Schreibe das Vektorpotentials in Kugelkoordinaten, um zu zeigen, dass $\forall\vec{r}: \quad \vec{A}(\vec{r}) \parallel \hat{e}_\varphi$. Motiviere diese Richtungsabhängigkeit des Vektorpotentials kurz.
Hinweis: Zeige und benutze die Relation $\hat{e}_z = \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta$.

(b) Bestimme $\rho(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$.
Hinweis: $\rho(\vec{r})$ ist zeitunabhängig (warum?) und hat eine sehr einfache Form. Benutze den Satz von Gauß, um $\vec{E}$ zu bestimmen.

(c) Bestimme $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$. Überprüfe dabei explizit, ob die Stromdichte aus der Formel $\vec{j}(\vec{r}) = \sigma\vec{v}$ konsistent mit der Stromdichte ist, welche du über $\vec{B}(\vec{r})$ aus den Maxwell-Gleichungen erhältst. Falls dies nicht der Fall ist, erkläre die Diskrepanz!
Hinweis: Für die Rotation in Kugelkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\hat{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\varphi\,.\end{aligned}$$

Das Ergebnis für das $\vec{B}$-Feld lautet

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 R\omega\sigma}{3}\hat{e}_z, & r \le R \\ \frac{\mu_0 R^4\omega\sigma}{3r^3}(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta), & r \ge R \end{cases}.$$

Aufgabe 2 - Einfache Potentiale (12 Punkte)

Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ für folgende elektromagnetische Potentiale.

(a) Für eine Konstante q,

$$\Phi(\vec{r},t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt\vec{r}}{r^3}\,.$$

Skizziere eine Ladungs- und/oder Stromverteilung, welche mit diesen elektromagnetischen Potentialen konsistent ist.

(b) Für Konstanten A_0, ω, k,

$$\Phi(\vec{r},t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = A_0\sin(kx - \omega t)\,\hat{e}_y\,.$$

Erfüllen diese Potentiale die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für beliebige Werte von A_0, ω und k? Wenn nein, gib Bedingungen für die drei Parameter an, für die die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

Aufgabe 3 - Rotierende Hohlkugel II (26 Punkte)

Betrachte eine homogen geladene Hohlkugel im Vakuum mit Radius R und Gesamtladung Q, welche mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert.

(a) Bestimme die Energie des elektromagnetische Feldes.
Hinweis: Die elektromagnetische Energiedichte ist gegeben durch

$$w_{em} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) .$$

Das Endergebnis lautet

$$W_{em} = \frac{Q^2}{\pi}\left[\frac{1}{8\epsilon_0 R} + \frac{\mu_0\omega^2 R}{36}\right] .$$

(b) Bestimme den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes.
Hinweis: Die elektromagnetische Impulsdichte ist gegeben durch

$$\vec{\Pi} = \vec{D}\times\vec{B} .$$

Das Endergebnis lautet

$$\vec{L} = \frac{Q^2 R\mu_0\omega}{18\pi}\hat{e}_z .$$

(c) Wir modellieren das Elektron als Hohlkugel, analog zur Aufgabenstellung. Experimentell kann man den Eigendrehimpuls, den sogenannten Spin, messen und erhält den Betrag $\frac{\hbar}{2}$, wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ mit dem Planckschen Wirkungsquantum h. Wir nehmen an, dass dieser Eigendrehimpuls dem elektromagnetischen Drehimpuls entspricht. Zusätzlich nehmen wir an, dass die elektromagnetische Energie des Elektrons für die gesamte Ruhemasse nach der Einsteinformel verantwortlich ist, also $W_{\text{el}} = m_e c^2$ wobei m_e die Ruhemeasse des Elektrons sei. Bestimme aus diesen Annahmen den Radius R und die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation des Elektrons. Ist dieses Modell sinnvoll?
Hinweis: Betrachte zur Beantwortung der letzten Frage das Produkt ωR.