Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 1

Abgabe am 19.04.2018 in der Vorlesung & Übung am 25.04.2018

Aufgabe 1 – Kronecker-Delta & Levi-Civita-Tensor **14 Punkte**

(a) Das Kronecker-Delta ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Zeige, dass sich das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ schreiben lässt als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{ij} \delta_{ij} \, a_i b_j \ .$$

(b) Das Levi-Civita-Symbol ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad ijk = 123,\ 231 \text{ oder } 312 \text{ (zyklische Permutation)} \\ -1 & \text{falls} \quad ijk = 132,\ 213 \text{ oder } 321 \text{ (antizyklische Permutation)} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Es wird häufig auch als total antisymmetrischer Tensor bezeichnet. Zeige, dass sich damit das Kreuzprodukt zweier Vektoren schreiben lässt als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \, \hat{e}_i \, a_j b_k \ ,$$

wobei $\hat{e}_{i,j,k}$ die Einheitsvektoren eines rechtshändigen, orthogonalen Koordinatensystems sind.

(c) Zeige mit der Definition des Levi-Civita-Symbols die Antikommutativität des Kreuzprodukts, also

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \ .$$

(d) Das Produkt zweier Levi-Civita-Symbole lässt sich als Determinante einer Matrix von Kronecker-Deltas schreiben,

$$\epsilon_{ijk} \, \epsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} \ .$$

Beweise mit Hilfe dieses Zusammenhangs die folgenden beiden Identitäten:

(i) $\sum_k \epsilon_{ijk} \, \epsilon_{klm} = \delta_{il} \, \delta_{jm} - \delta_{im} \, \delta_{jl}$

(ii) $\sum_{ij} \epsilon_{ijk} \, \epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$

Aufgabe 2 – Vektoranalysis **24 Punkte**

Im Folgenden sei r die Länge des Vektors $\vec{r} = (x, y, z)$ und ∇ der *Nabla-Operator*, $\nabla = \hat{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \hat{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \hat{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$, bei dem es sich um einen Vektor-Operator handelt.

(a) Angewandt auf einen Skalar bzw. ein Skalarfeld spricht man vom *Gradienten*, welcher einen Vektor liefert.

  (i) Zeige $\nabla(r^2) = 2\vec{r}$.

  (ii) Zeige $\nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$, wobei $\hat{r} = \vec{r}/r$.

  (iii) Leite eine allgemeine Formel für $\nabla(r^n)$ her.

(b) Wird der Nabla-Operator auf einen Vektor angewandt, so unterscheidet man zwischen dem Skalar- und dem Kreuzprodukt als verknüpfende Operationen.

Im Falle des Skalarprodukts spricht man von der *Divergenz*, welche dementsprechend eine skalare Größe darstellt.

Skizziere die Vektorfunktion

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2}$$

und berechne ihre Divergenz $\nabla \cdot \vec{v}$. Interpretiere das Ergebnis. (Ergibt es Sinn, wenn man es mit der Skizze vergleicht?)

(c) Bei der Verknüpfung mittels des Kreuzproduktes handelt es sich um die sog. *Rotation*, welche wieder einen Vektor liefert.

Zeige, dass die Divergenz einer Rotation immer verschwindet, d.h.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{r}) = 0 \quad \forall\, \vec{r}$$

und dass die Rotation eines Gradienten immer verschwindet, d.h.

$$\nabla \times (\nabla(r)) = 0 \quad \forall\, r.$$

(d) Konstruiere eine (nicht-konstante) Vektorfunktion $\vec{v}$, deren Divergenz und Rotation identisch verschwinden, d.h.

$$\nabla \cdot \vec{v} \equiv 0 \qquad \nabla \times \vec{v} \equiv 0$$

(e) Zeige unter sinnvoller Verwendung des Levi-Civita-Symbols aus Aufgabe 1 folgende Produktregeln für den Nabla-Operator, jeweils eine für den Gradienten, die Divergenz sowie die Rotation.

  (i) $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}$

  (ii) $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$

  (iii) $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a})$

Aufgabe 3 – Delta-Funktion **22 Punkte**

(a) Betrachte eine Folge δ_n von normierten Gaußfunktionen mit der Breite $\sigma_n = 1/n$,

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}} \ . \tag{1}$$

Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0) \ .$$

Hinweis: Entwickle f(x) in einer Taylor-Reihe und betrachte das Ergebnis des Integrals für die einzelnen Terme. Beachte die Normierung der Gaußfunktionen δ_n.

Der Grenzwert $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n$ dieser Funktionenschar wird in der Physik als *Deltafunktion* bezeichnet und über ihre charakteristische Eigenschaft definiert, dass sie für alle Funktionen $f(x)$ obige Eigenschaft erfüllt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \, \mathrm{d}x = f(0) \ . \tag{2}$$

Im streng mathematischen Sinne handelt es sich um eine Distribution. Man betrachtet lineare Funktionale auf Testräumen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, also stetige Abbildungen $l : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ mit $l(af_1 + bf_2) = a\, l(f_1) + b\, l(f_2)$. Diese lassen sich mit Hilfe des Grenzwerts einer bestimmten Folge l_n von stetigen Funktionen ausdrücken:

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l_n(x) f(x) \mathrm{d}x \ .$$

Der punktweise Grenzwert $\lim_{n\to\infty} l_n(t)$ kann, muss aber nicht existieren. Man schreibt abkürzend $l(f) = \int_{-\infty}^{\infty} l(x) f(x) \mathrm{d}x$ und nennt $l(x)$ eine *Distribution.* Sehr wichtig für die Physik ist die Diracsche δ-Distribution $\delta : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, die durch Gleichung (2) definiert ist.

Im Folgenden werden wir noch einige Eigenschaften der Deltafunktion zeigen.

(b) Zeige, dass die Deltafunktion die Ableitung der Heaviside-Stufenfunktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist, d.h. $\delta(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)$.
Hinweis: Nutze Eigenschaft (2) *und partielle Integration.*

(c) Zeige, dass für die Ableitung der Deltafunktion gilt:

$$x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \delta(x) = -\delta(x)$$

(d) Die Distributionsableitung l' ist definiert über die partielle Integration $l'(f) = -l(f')$ für geeignete f. Zeige damit die allgemeinere Eigenschaft für die Ableitung der Deltafunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) \, \mathrm{d}x = (-1)^{(n)} f^{(n)}(0).$$