

Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 2

Abgabe am 26.04.2018 in der Vorlesung & Übung am 02.05.2018

Aufgabe 1 – Die Delta-Funktion in 3D

21 Punkte

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir uns mit verschiedenen Eigenschaften der eindimensionalen Delta-Funktion vertraut gemacht. Nun wollen wir uns deren Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ansehen. Wie üblich sei $\vec{r} = (x, y, z)$. Man definiert

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) .$$

Analog zum eindimensionalen Fall lautet die definierende Filtereigenschaft der dreidimensionalen Delta-Funktion

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}) d^3r = f(\vec{a}) .$$

Dabei ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ konstant.

- (a) Nutze Delta-Funktionen in den angegebenen Koordinatensystemen, um die im Folgenden beschriebenen Ladungsverteilungen in Form von dreidimensionalen Ladungsdichten $\rho(\vec{r})$ darzustellen.

Überprüfe dein Ergebnis, sofern es nicht aus der Herleitung hervorgeht. (Entspricht das Integral über $\rho(\vec{r})$ der angegebenen Gesamtladung?)

- (i) Auf einer Kugelschale mit Radius R sei die Ladung Q gleichmäßig verteilt. Nutze Kugelkoordinaten.
- (ii) Auf dem Mantel eines Zylinders mit Radius b sei pro Einheitslänge des Zylinders die Ladung λ gleichmäßig verteilt. Nutze Zylinderkoordinaten.
- (iii) Auf einer Kreisscheibe mit vernachlässigbarer Dicke und Radius R sei die Ladung Q gleichmäßig verteilt. Nutze Zylinderkoordinaten.

- (b) Werte die folgenden Integrale aus.

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^3} (r^2 + \vec{r} \cdot \vec{a} + a^2) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}) d^3r,$$

wobei a die Länge des konstanten Vektors \vec{a} ist.

(ii)

$$\int_W |\vec{r} - \vec{b}|^2 \delta^{(3)}(5\vec{r}) d^3r,$$

wobei W ein Würfel mit Seitenlänge 2 und Zentrum im Ursprung ist und $\vec{b} = 4\hat{e}_y + 3\hat{e}_z$.

(iii)

$$\int_K (r^4 + r^2 (\vec{r} \cdot \vec{c}) + c^4) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{c}) d^3r,$$

wobei K eine Kugel mit Radius 6 um den Ursprung und c die Länge des Vektors $\vec{c} = 5\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ ist.

Aufgabe 2 – Integralsätze**16 Punkte**

- (a) Teste den Satz von Gauss mit dem Vektorfeld

$$\vec{v} = xy \hat{e}_x + 2yz \hat{e}_y + 3zx \hat{e}_z .$$

Nutze als Testvolumen einen Würfel mit Kantenlänge 2.

- (b) Teste den Satz von Stokes mit dem Vektorfeld

$$\vec{v} = -y \hat{e}_x + yz^2 \hat{e}_y + y^2z \hat{e}_z .$$

Nutze als Testvolumen eine Halbkugel mit Radius R (mit $z > 0$). Der Rand der Halbkugel liege in der xy -Ebene.

- (c) Leite ausgehend von der differentiellen Form der Maxwellgleichungen für das elektrische Feld
- \vec{E}
- deren entsprechende Integralform her.

- (i) Gaußsches Gesetz:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3r .$$

- (ii) Induktionsgesetz:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \iff \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 .$$

Aufgabe 3 – Ladungsdichten**23 Punkte**

- (a) Skizziere die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \lambda \cdot \chi_{[-L,L]}(x) \delta(y) \delta(z),$$

wobei $\chi_{[-L,L]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [-L, L] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist. λ ist eine Konstante.

- (b) Bestimme das elektrische Feld auf der
- z
- Achse für die Ladungsverteilung aus Teilaufgabe (a), wobei die Gesamtladung
- Q
- sei.

Hinweis: Während deiner Rechnung wird ein Integral der Form

$$\int \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

auftauchen. Berechne das Integral durch Substitution von $x = \alpha \tan \xi$. Anschließend wirst du auf den Ausdruck $\sin(\arctan(x))$ treffen. Zeige, um diesen Ausdruck zu vereinfachen, dass $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.

- (c) Skizziere die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \lambda \cdot \chi_{[-L,L]}(x) \delta(|y| - L) \delta(z) + \lambda \cdot \delta(|x| - L) \chi_{[-L,L]}(y) \delta(z),$$

wobei λ eine Konstante ist.*Hinweis: Es gilt $\delta(|x| - a) = \delta(x - a) + \delta(-x - a)$.*

- (d) Bestimme das elektrische Feld auf der
- z
- Achse für die Ladungsverteilung aus Teilaufgabe (c), wobei die Gesamtladung
- Q
- sei.