Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 3

Abgabe am 03.05.2018 in der Vorlesung & Übung am 09.05.2018

Aufgabe 1 – Volumen- und Oberflächenintegrale **24 Punkte**

(a) Skizziere folgende Punktmengen für $R > 0$ und $L > 0$.

(i) $V_1 = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

(ii) $V_2 = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq L\}$

(iii) $V_3 = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \max(|x|, |y|, |z|) \leq L\}$

(b) Berechne explizit (ohne den Satz von Gauß zu benutzen) die Oberflächenintegrale

$$\oint_{\partial V_i} \vec{g}_j(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

für die drei Punktmengen aus Teilaufgabe (a) und die beiden Vektorfelder

$$\vec{g}_1(\vec{r}) = \vec{r} \qquad \text{und} \qquad \vec{g}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Hinweis: Die folgenden Relationen sind hilfreich:

$$\int \frac{1}{(\alpha^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t = \frac{t}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 + t^2}} \ ,$$

$$\int \frac{1}{(\alpha^2 + t^2)\sqrt{2\alpha^2 + t^2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2\alpha^2 + t^2}}\right) \ , \quad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \ .$$

(c) Berechne explizit (ohne den Satz von Gauß zu benutzen) die Volumenintegrale

$$\int_{V_i} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_j(\vec{r})\right) \mathrm{d}^3 r$$

für die drei Punktmengen aus Teilaufgabe (a) und die beiden Vektorfelder aus Teilaufgabe (b).

Aufgabe 2 – Satz von Gauß **10 Punkte**

Benutze den Gaußschen Integralsatz, um die elektrische Feldstärke für folgende Ladungsdichten zu finden.

(a) $\rho(x) = \rho_0 \exp[-\kappa\sqrt{x^2}]$ Benutze kartesische Koordinaten.

(b) $\rho(x, y) = \rho_0 \exp[-\kappa\sqrt{x^2 + y^2}]$ Benutze Zylinderkoordinaten.

(c) $\rho(x, y, z) = \rho_0 \exp[-\kappa\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}]$ Benutze Kugelkoordinaten.

Aufgabe 3 – Noch eine Ladungsdichte **10 Punkte**

Betrachte die Ladungsverteilung

$$\rho\left(\vec{r}\right) = q\delta\left(\vec{r}\right) - \frac{q}{4\pi} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^2}{r}$$

mit $r = |\vec{r}|$ für $\alpha > 0$ und $q > 0$.

(a) Bestimme die Gesamtladung der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. Was für ein physikalisches Objekt könnte diese Ladungsverteilung repräsentieren?

(b) Bestimme das elektrische Feld für die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$.

(c) Bestimme das elektrostatische Potential für die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$.

Hinweis: Benutze eine nicht ganz offensichtliche partielle Integration.

Aufgabe 4 – Multipolentwicklung **16 Punkte**

Auf den Ecken eines Quadrates mit Kantenlänge $2a$ befinden sich die Punktladungen q_1, q_2, q_3 und q_4. Diese Ladungsverteilung soll neutral sein.

(a) Wie lautet für diese Konfiguration die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$?

(b) Berechne für diese Konfiguration das Dipolmoment

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r})\, \vec{r} \mathrm{d}^3 r \,.$$

(c) Berechne für diese Konfiguration den Quadrupoltensor $\boldsymbol{Q}$, dessen Kopmonenten gegeben sind durch die Quadrupolmomente

$$Q_{ij} = \int_V (3 r_i r_j - \delta_{ij} r^2) \rho(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r \,,$$

wobei i, j die kartesischen Koordinaten indizieren.

(d) Zeige, dass sich die Ladungen so wählen lassen, dass

(i) das Dipolmoment verschwindet.

(ii) die Quadrupolmomente verschwinden.

Können auch gleichzeitig Dipol- und Quadropulmomente verschwinden? Begründe!