Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 4

Abgabe am 09.05.2018 in der Vorlesung & Übung am 16.05.2018

Aufgabe 1 – Konzentrische Kugelschalen **26 Punkte**

Betrachte zwei dünne, homogen geladene Kugelschalen, deren Mittelpunkte im Koordinatenurprung liegen. Die innere Schale mit Radius R_1 trägt Ladung die q, die äußere Schale mit Radius R_2 trägt die Ladung $-q$. Ladungsverteilungen, die sich nicht in dreidimensionalen Volumina, sondern (näherungsweise) in zweidimensionalen Flächen befinden, werden beschrieben durch eine Flächenladungsdichte σ.

(a) Zeige zunächst, dass für die innere Kugelschale $\sigma_1 = q/\left(4\pi R_1^2\right)$ und für die äußere $\sigma_2 = -q/\left(4\pi R_2^2\right)$ gilt.

(b) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$ und

(c) das Potential $\Phi\left(\vec{r}\right)$, und zwar innerhalb der Schalen, zwischen den Schalen und außerhalb der Schalen. Wähle $\Phi\left(\vec{r}\right) = 0$ am Ursprung.

(d) Skizziere die Feldlinien und Äquipotenzialflächen sowie den radialen Verlauf des Potentials.

Aufgabe 2 – Felder an Grenzflächen **34 Punkte**

Wir betrachten das Verhalten der elektrischen Feldstärke und des elektrostatischen Potentials an einer Grenzfläche, welche die Flächenladungsdichte σ trägt. Es seien $E_i^{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{E}_i$ (mit $i = 1, 2$) die Normalkomponenten ober- und unterhalb der Grenzfläche und $\vec{n}$ der Flächennormalenvektor. $E_i^{\|}$ bezeichne die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche.

(a) Zeige, dass die Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Durchgang durch die Grenzfläche unstetig ist, also

$$E_1^{\perp} - E_2^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \, .$$

Integriere dazu die Divergenz von $\vec{E}$ innerhalb eines Gaußsches Kästchen der Dicke ϵ und des Volumens V im Grenzfall $\epsilon \to 0$. Die Seiten parallel zur Grenzfläche haben jeweils die Fläche A. Mache zuerst eine Skizze dieser Anordnung.

(b) Zeige, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes, beim Durchgang durch die Grenzfläche stetig ist, also

$$E_1^{\|} - E_2^{\|} = 0 \, .$$

Integriere dazu die Rotation von $\vec{E}$ innerhalb einer Stokesschen Fläche der Breite ϵ und der Länge L im Grenzfall $\epsilon \to 0$. Die Ränder parallel zur Grenzfläche haben jeweils die Länge l. Mache zuerst eine Skizze dieser Anordnung.

(c) Zeige, dass das Potential beim Durchgang durch die Grenzfläche stetig ist. Nutze dazu die Definition des Potentials über das elektrische Feld und betrachte die Potentialdifferenz zwischen einem Punkt oberhalb und unterhalb der Grenzfläche. Mache auch hier zuerst eine Skizze.

(d) Wie verhält sich der Gradient des Potentials an der Grenzfläche?

(e) Macht es einen Unterschied, welche Seite der Grenzfläche als "oben" und welche als "unten" bezeichnet wird? Begründe deine Aussage.

Aufgabe 3 – Elektrisches Potential **15 Zusatzpunkte**

(a) Zeige, dass die Gleichung

$$\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} d^3r' \ ,$$

die das Potential einer auf ein Volumen verteilten Ladung mit Ladungsdichte $\rho\left(\vec{r}\right)$ beschreibt, die Poissongleichung erfüllt. Es wird dabei angenommen, dass

$$\lim_{r\to\infty} \Phi\left(\vec{r}\right) \to 0 \ .$$

(b) Benutze die Formel für $\Phi\left(\vec{r}\right)$ aus Teilaufgabe (a) um das Potential einer Vollkugel mit uniform verteilter Ladung Q und Radius R zu berechnen.