Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 5

Abgabe am 16.05.2018 in der Vorlesung & Übung am 23.05.2018

Aufgabe 1 – Kugelkondensator **18 Punkte**

Betrachen Sie einen Kugelkondensator, der aus einer leitenden Kugelschale mit Radius b und einer leitenden Vollkugel mit Radius $a < b$ besteht. Skizzieren Sie den Kondensator

(a) für den Fall dass die Schale geerdet ist und die Kugel die Ladung Q trägt,

(b) sowie für den Fall, dass die Kugel geerdet ist und die Schale die Ladung Q trägt.

Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators

(c) für den Fall dass die Schale geerdet ist und die Kugel die Ladung Q trägt,

(d) sowie für den Fall, dass die Kugel geerdet ist und die Schale die Ladung Q trägt.

Aufgabe 2 – Eine Punktladung in der Zange **22 Punkte**

Betrachte ein geerdetes Objekt, das durch folgende Punktmenge beschrieben wird,

$$\left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | y = 0\right\} \cup \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | x = \frac{\sqrt{3}}{y}\right\} \quad , \tag{1}$$

wobei $\cup$ die Vereinigung zweier Mengen symbolisiert.

(a) Skizziere dieses geerdete Objekt zusammen mit einer Punktladung am Ort $\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. *Hinweis: Es gilt* $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *sowie* $\tan 60° = \sqrt{3}$.

(b) Bestimme die Spiegelabbildungen für dieses Problem. Gesucht, ist die Abbildung $S : (q, \vec{r}_0) \to (q', \vec{r}_0{}')$, welches ein Tupel mit Ort und Ladung einer Punktladung $(q, \vec{r}_0)$, ihre Spiegelladung mit Ladung q' und Ort $\vec{r}_0{}'$ unter den gegebenen Randbedingungen zuweist. *Hinweis: Man erhält hier zwei Spiegelabbildungen. Überlege, wie eine Spiegelung die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes parallel bzw. orthogonal zur Spiegelebene beeinflusst.*

(c) Bestimme die Spiegelladungen für diese Konfiguration mit Hilfe deiner Spiegelabbildungen aus Teilaufgabe (b). Prüfe, ob das relevante Potential aus realen Ladungen und Spiegelladungen die Randbedingungen erfüllt. Falls nicht, versuche einen Grund zu finden, warum deine Herangehensweise nicht funktioniert und finde die korrekte Spiegelladungskonfiguration. Fertige eine Skizze dieser Konfiguration an. *Hinweis: Um zu zeigen, dass die gefundene Spiegelladungskonfiguration in der Tat die korrekten Randbedingungen wiedergibt, genügt ein Argument mit Hilfe der Skizze. Die relation*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ist hilfreich, um die Ausdrücke für die Spiegelladungen zu vereinfachen.

Aufgabte 3 – Greensche Funktion **20 Punkte**

(a) Die Greensche Funktion ist in der Elektrostatik definiert als die Lösung der Poisson-Gleichung für eine Einheits-Punktladung. Ein Beispiel für eine Greensche Funktion ist

$$G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \ .$$

Die allgemeine Form der Greenschen Funktion lautet $G(\vec{r},\vec{r}\,') = G_0(\vec{r},\vec{r}\,') + f(\vec{r},\vec{r}\,')$, wobei die Funktion $f(\vec{r},\vec{r}\,')$ der Laplace-Gleichung genügt. Zeige, dass

$$\Delta_r G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \ .$$

(b) Mit Hilfe der Greenschen Funktion und Greens Theorem lässt sich die Poisson-Gleichung für das elektrische Potential in einem Volumen V in eine Integralgleichung umformen,

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\mathrm{d}V' + \epsilon_0 \oint_{\partial V} \left[G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n}\right] \mathrm{d}S' \ .$$

Dabei ist Φ das Potential und $\vec{n}$ der Normalenvektor der Volumenoberfläche. $\partial/\partial n \equiv \vec{n}\cdot\nabla$ ist die Normalenableitung.
Über die Oberflächenintegrale gehen die Randbedingungen in die Gleichung mit ein. Ist sowohl das Potential als auch dessen Normalenableitung auf dem Rand des Volumens gegeben, ist das Problem jedoch überbestimmt, da sich diese Bedingungen in der Regel nicht gleichzeitig erfüllen lassen. Durch Wahl von $f(\vec{r},\vec{r}\,')$ in der Greenschen Funktion können wir uns für eine Art von Randbedingungen entscheiden.
Wie lautet die Randbedingung für $G_\mathrm{D}(\vec{r},\vec{r}\,')$ im Fall von Dirichlet-Randbedingungen für das Potential und welcher Ausdruck folgt daraus für Φ?

Hinweis: Wähle $G_\mathrm{D}(\vec{r},\vec{r}\,')$ so, dass das entsprechende Oberflächenintegral verschwindet.

(c) Betrachte nun den Fall von Neumann-Randbedingungen für das Potential. Leite aus der Forderung

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G_\mathrm{N}(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n}\,\mathrm{d}S' = -\Phi_0 \ ,$$

wobei Φ_0 eine beliebige Konstante ist, die Randbedingung für $G_\mathrm{N}(\vec{r},\vec{r}\,')$ her. Welcher Ausdruck folgt daraus für Φ_0 und Φ? Welche Bedeutung hat die Konstante Φ_0?

(d) Zeige mit Hilfe des Satzes von Gauß, dass die Wahl

$$\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n} = 0 \qquad \forall\,\vec{r}\,' \in \partial V$$

nicht erlaubt ist.