

Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 6

Abgabe am 23.05.2018 in der Vorlesung & Übung am 30.05.2018

Aufgabe 1 – L^2 und seine Orthonormalbasen

28 Punkte

Für zwei Funktionen $f, g : [-1, 1] \mapsto \mathbb{C}$ definiert man ein Skalarprodukt über

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f^*(x) g(x) dx \quad (1)$$

woraus sich die Norm einer Funktion zu $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ergibt. Der Raum der Funktionen $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{C}$ mit $\|f\| < \infty$ wird $L^2([-1, 1])$ genannt.

(a) Zeige, dass Gleichung (1) tatsächlich ein (komplexes) Skalarprodukt definiert. Dazu müssen folgende Bedingungen gelten:

(i) $\forall f, g, h \in L^2([-1, 1]) : \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle,$

(ii) $\forall f, g \in L^2([-1, 1]), \lambda \in \mathbb{C} : \langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle,$

(iii) $\forall f, g \in L^2([-1, 1]) : \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*,$

(iv) $\forall f \in L^2([-1, 1]) : \langle f, f \rangle \geq 0,$

(v) $\forall f \in L^2([-1, 1]) : \langle f, f \rangle = 0 \iff f(x) = 0.$

(b) Nach dem ersten Approximationssatz von Weierstrass kann man jede Funktion auf einem kompakten Intervall (wie z.B. $[-1, 1]$) durch eine Linearkombination von Polynomen approximieren. Das heißt, dass Polynome dicht in $L^2([-1, 1])$ liegen, also kann man insbesondere vollständige Orthonormalbasen des L^2 aus Polynomfunktionen erzeugen. Der einfachste Versuch wäre die Monome $p_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ anzusetzen. Man würde dann erwarten, eine beliebige Funktion $f \in L^2([-1, 1])$ folgendermaßen schreiben zu können:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) . \quad (2)$$

Finde einen Ausdruck für die c_n mit Hilfe der Taylorreihe. Gib die ersten 4 Koeffizienten für die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$.

(c) Falls die Monome eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2([-1, 1])$ sind, dann sollten sich die Koeffizienten aus Gleichung (2) über folgende Gleichung bestimmen lassen:

$$c_n = \langle p_n, f \rangle . \quad (3)$$

Bestimme die ersten vier Koeffizienten c_n für die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$ mit Formel (3). Dein Ergebnis wird sich nicht mit den Koeffizienten aus Teilaufgabe (b) decken. Warum nicht? *Hinweis: Es gilt*

$$\int_{-1}^1 x \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}, \quad \int_{-1}^1 x^3 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} .$$

- (d) Wir können aus den Monomen p_n ein Orthonormalsystem erhalten, indem wir das sogenannte Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Nach diesem Verfahren bilden die Funktionen Q_n ein Orthonormalsystem, wobei

$$Q_0 = \frac{p_0}{\sqrt{\langle p_0, p_0 \rangle}}, \quad \forall n \neq 0 : Q_n = \frac{\tilde{Q}_n}{\sqrt{\langle \tilde{Q}_n, \tilde{Q}_n \rangle}}, \quad \tilde{Q}_n = p_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle p_n, Q_i \rangle Q_i.$$

Bestimme die ersten vier Q_n und zeige, dass sie die Gleichung $Q_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$ erfüllen, wobei P_n die Legendre-Polynome sind.

- (e) Die normierten Legendre-Polynome $Q_n(x)$ sind also eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2([-1, 1])$. Das heißt, wir können jede Funktion $f \in L^2([-1, 1])$ folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n Q_n(x),$$

wobei $\alpha_n = \langle Q_n, f \rangle$. Bestimme die ersten Vier Koeffizienten α_n für die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$. Skizziere die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ zusammen mit den Funktionen $F_N = \sum_{n=0}^N \alpha_n Q_n(x)$ für $N = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 2 – L^2 und seine Orthonormalbasen II 22 Punkte + 6 Zusatzpunkte

Wir betrachten in dieser Teilaufgabe den Raum $L^2([0, 2\pi])$. Die Definition des Skalarprodukts ist analog zu Aufgabe 1, beachte lediglich, dass die Integration nun von 0 bis 2π an Stelle von -1 bis 1 geht.

- (a) Zeige, dass die Menge von Funktionen

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}, n \neq 0} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}, n \neq 0}$$

ein orthonormales System in $L^2([0, 2\pi])$ bildet.

Hinweis: Benutze die Additionstheoreme

- (i) $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$,
(ii) $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$ und
(iii) $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$.

- (b) Zeige, dass die Menge von Funktionen $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein orthonormales System in $L^2([0, 2\pi])$ bildet.
- (c) Nach dem zweiten Approximationssatz von Weierstrass ist A vollständig in $L^2([0, 2\pi])$. Schlussfolgere, dass damit auch B eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2([0, 2\pi])$ ist. *Hinweis: Zeige dazu, dass sich jedes Element von A als (komplexe) Linearkombination von Elementen von B schreiben lässt.*
- (d) Bestimme die Koeffizienten c_n für $n \in \mathbb{Z}$, $-3 \leq n \leq 3$ für die Darstellung der Funktion $f(x) = x$ in Bezug auf die Basis B , also $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n e^{inx}$. Skizziere die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ zusammen mit den Funktionen $F_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n e^{inx}$ für $N = 0, 1, 2, 3$.

- (e) Zusatzaufgabe: Plote die Funktionen $F_N(x)$ für $N = 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$. Was beobachtest du am Rand des Definitionsbereichs?

Aufgabe 3 – L^2 und seine Orthonormalbasen III

10 Punkte

Die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 nennt man oft S . Man kann sie über die Winkel $\theta = [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ in Kugelkoordinaten parametrisieren. Funktionen auf der Einheitskugel lassen sich dann als $f(\theta, \varphi)$ schreiben. Der Raum $L^2(S)$ trägt in Analogie zum Winkelintegral in Kugelkoordinaten das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi .$$

- (a) Zeige, dass die Funktionen

$$Z_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Q_l(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

für $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$ eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2(S)$ bilden, wobei die Q_l die normierten Legendre-Polynome aus Aufgabe 1 sind. *Hinweis: Benutze die Beobachtungen aus Aufgabe (1e) sowie (2c). Für die Vollständigkeit erwartet man*

$$\sum_{lm} Z_{lm}(\theta, \varphi) Z_{lm}^*(\theta', \varphi') \sim \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta')) \delta(\varphi - \varphi') .$$

- (b) Es gibt noch eine alternative Wahl für eine vollständige Orthonormalbasis des $L^2(S)$. Dazu definiert man die zugeordneten Legendre-Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$,

$$m \geq 0 : P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} (P_l(x)) ,$$

$$m < 0 : P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x) ,$$

für $m \in \mathbb{Z}$ und $l \in \mathbb{N}_0$. Man kann zeigen, dass sie für jedes m einen vollständigen orthonormalen Satz von Funktionen auf $L^2([-1, 1])$ bilden, solange man die Fälle ausschließt in denen $P_l^m(x)$ zur Nullfunktion wird. Wie lautet die Bedingung für l sodass bei gegebenen m die $P_l^m(x)$ nicht zur Nullfunktion werden? Schlussfolgere, dass daraus folgt, dass die Kugelflächenfunktionen,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} ,$$

für $l \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, m \leq |l|$ ein vollständiges orthogonales System des $L^2(S)$ bilden (Normierung ist auch erfüllt, aber das muss nicht gezeigt werden).