Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 7

Abgabe am 30.05.2018 in der Vorlesung & Übung am 06.06.2018

Aufgabe 1 – Sphärische Multipolentwicklung **16 Punkte**

Es seien zwei Vektoren $\vec{r}, \vec{r}\,' \in \mathbb{R}^3$ durch ihre Kugelkoordinaten (r, θ, φ) bzw. (r', θ', φ') gegeben. Falls $r > r'$ gilt folgende Identität durch Entwicklung in Kugelflächenfunktionen Y_{lm},

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \, Y_{lm}(\theta, \varphi) \, .$$

(a) Zeige, dass sich die Multipolentwicklung im Fernfeld des Potentials einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,')$ in Kugelkoordinaten folgendermaßen schreiben läßt,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \, .$$

Gib dazu einen allgemeinen Ausdruck für die Koeffizienten q_{lm} in Abhängigkeit der Ladungsverteilung an. Welche Terme der Doppelsumme über m und l tragen zur jeweiligen n -ten Ordnung der Multipolentwicklung bei? Begründe deine Antwort!

(b) Notiere die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten explizit bis zur ersten Ordnung für eine allgemeine Ladungsverteilung in Abhängigkeit der entsprechenden sphärischen Multipolmomente q_{lm}.

(c) Drücke $q_{0,0}, q_{1,0}, q_{1,1}$ und $q_{1,-1}$ durch die Gesamtladung Q und die (kartesischen) Komponenten des Dipolmoments $\vec{p}$ aus.

Aufgabe 2 – Eigenschaften der Fouriertransformation **22 Punkte**

Beweise folgende Eigenschaften der Fouriertransformation und gib jeweils ein Beispiel an:

(a) Die Fouriertransformierte einer geraden Funktion ist gerade.

(b) Die Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion ist ungerade.

(c) Die Fouriertransformierte einer reellen Funktion ist reell, wenn die Funktion gerade ist und imaginär, wenn die Funktion ungerade ist.

(d) Die Fouriertransformation ist linear.

(e) Die Fouriertransformierte des Produkts $g(x) = f_1(x) f_2(x)$ ergibt sich als

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \tilde{f}_2(q) \tilde{f}_1(k - q) \, ,$$

wobei $\tilde{f}_1(k)$, $\tilde{f}_2(k)$ die Fouriertransformierten von $f_1(x)$, $f_2(x)$ sind.

Aufgabe 3 – Gemitteltes elektrisches Feld **22 Punkte**

(a) Zeige, dass das über eine Kugel mit Radius R gemittelte Feld einer Ladungsverteilung, die sich innerhalb der Kugel befindet, die folgende Form hat,

$$\langle \vec{E} \rangle = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{R^3} \ , \tag{1}$$

wobei $\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r})\,\vec{r}\,\mathrm{d}^3r$ das Dipolmoment der Ladungsverteilung bezogen auf den Mittelpunkt der Kugel ist. Gehe dazu wie folgt vor:

(i) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{Kugel}}$ innerhalb einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung $-q$.

(ii) Betrachte nun eine Punktladung q am Ort $\vec{r}$ innerhalb der Kugel, welche das Feld $\vec{E}_{\vec{r}}$ erzeugt. Zeige, dass das über das Kugelvolumen gemittelten Feld der Punktladung,

$$\langle \vec{E}_{\vec{r}} \rangle \equiv \frac{1}{V}\int_V \vec{E}_{\vec{r}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3r' \ ,$$

dem Feld der homogen geladenen Kugel aus Teilaufgabe a) entspricht, d.h.

$$\langle \vec{E}_{\vec{r}} \rangle = \vec{E}_{\text{Kugel}} \ .$$

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass die Ausdrücke unter den Volumenintegralen gleich sind.

(iii) Zeige, dass sich $\langle \vec{E}_{\vec{r}} \rangle$ schreiben lässt als

$$\langle \vec{E}_{\vec{r}} \rangle = -\frac{\vec{p}_{\vec{r}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \ ,$$

wobei $\vec{p}_{\vec{r}} = \int_V \rho_{\vec{r}}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,\mathrm{d}^3r'$ das Dipolmoment der Punktladung q am Ort $\vec{r}$ (beschrieben durch die Ladungsverteilung $\rho_{\vec{r}}$) im Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel ist.

(iv) Argumentiere, wie sich die Schritte (i) bis (iii) auf eine beliebige Ladungsverteilung innerhalb der Kugel verallgemeinern lassen, um Gleichung (1) zu zeigen.

(b) Wiederhole die Schritte aus Teilaufgabe a), mit dem Unterschied, dass du die Punktladung nun außerhalb der Kugel platzierst. Zeige damit, dass das über das Kugelvolumen gemittelte Feld aller Ladungen außerhalb der Kugel gleich dem von diesen Ladungen erzeugten Feld im Mittelpunkt der Kugel ist.