Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 8

Abgabe am 06.06.2018 in der Vorlesung & Übung am 13.06.2018

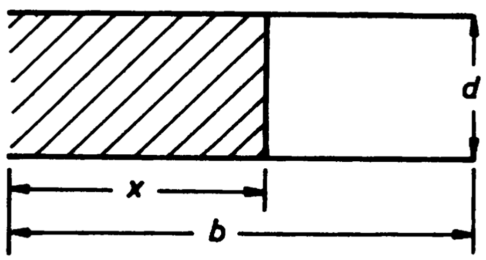
Aufgabe 1 – Dielektrikum im Kondensator **14 Punkte**

Betrachte zwei parallele leitende rechteckige Platten mit Seitenlängen a und b und Abstand d wie in der Abbildung im Querschnitt gezeigt. Ein Teil des Zwischenraums zwischen den Platten mit Länge x (entlang der Seite mit Länge b) sei mit einer isotropen homogenen dielektrischen Flüssigkeit mit Dichte ϱ und Dielektrizitätszahl ϵ gefüllt.

(a) Berechne die Kapazität dieses Kondensators.
Hinweis: Die Kapazität ist additiv, wenn man Teilstücke des Kondensators betrachtet.

(b) Die Kondensatorplatten des Kondensators seien jeweils mit einer Gesamtladung Q bzw. $-Q$ geladen. Berechne die Kraft auf das Dielektrikum in Abhängigkeit der Potentialdifferenz der Platten V.
Hinweis: Die Energie des Kondensators ist durch $E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ gegeben. Vergiss nicht, die Richtung der Kraft anzugeben!

(c) Der Kondensator sei nun aufrecht (mit der linken Seite aus der Abbildung "unten" und der rechten Seite "oben") über einem Reservoir des flüssigen Dielektrikums positioniert, sodass der Kondensator teilweise in die Flüssigkeit eintaucht. Wie hoch steigt die Flüssigkeit (relativ zum Ausgangspegel des Dielektrikums im Kondensator x_0) wenn der Kondensator mit einer Batterie mit Spannung V verbunden wird? Welche Arbeit wird von der Batterie verrichtet?
Hinweis: Wir nehmen an, dass b groß genug ist, um eine hinreichend große Menge des Dielektrikums im Kondensator zu halten und vernachlässigen Kapillarkräfte. Bezeichne die Erdbeschleunigung mit g.



Aufgabe 2 – Einfache Ströme **16 Punkte**

(a) Skizziere einen Draht, welcher die Stromdichte in Zylinderkoordinaten

$$\vec{j}\,(\rho,\varphi,z) = \frac{I}{2\pi R}\delta\,(\rho - R)\,\delta\,(z)\,\hat{e}_\varphi$$

hervorruft, wobei $I, R > 0$.

(b) Bestimme das Magnetfeld $\vec{B}\,(z)$ auf der z-Achse mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes, $\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\;\vec{j}\,(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

(c) Skizziere einen oder mehrere Drähte, welche die Stromdichte in Zylinderkoordinaten $\vec{j}\,(\rho,\varphi,z) = \frac{I}{2\pi R}\left(\delta\,(\rho - R)\,\delta\,(z-a) + \delta\,(\rho - R)\,\delta\,(z+a)\right)\hat{e}_\varphi$ hervorrufen, wobei $I, R > 0$.

(d) Berechne das Magnetfeld $\vec{B}\,(z)$ auf der z-Achse für die Stromverteilung aus Teilaufgabe (c). Zeige, dass $\forall a$: $\left.\frac{\partial|\vec{B}|}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$ und bestimme a , sodass $\left.\frac{\partial^2|\vec{B}|}{\partial z^2}\right|_{z=0} = 0$. Warum könnte solch ein Verhalten des $\vec{B}$ -Feldes in der Praxis nützlich sein?

Aufgabe 3 – Helmholtz-Theorem **30 Punkte**

Im Folgenden sei $\vec{F}(\vec{r})$ ein beliebiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, dass für $r\to\infty$ schneller als $1/r$ gegen Null geht ($r \equiv |\vec{r}|$). Wir wollen zeigen, dass sich $\vec{F}$ in einen divergenzfreien und einen wirbelfreien Anteil zerlegen lässt, d.h.

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}}\,\Phi + \nabla_{\vec{r}}\times\vec{A}\,. \tag{1}$$

(a) Zeige zuerst, dass sich $\vec{F}$ schreiben lässt als

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_{\vec{r}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'\,. \tag{2}$$

Hinweis: Du darfst hier $\Delta_{\vec{r}}$ und das Integral vertauschen.

(b) Mit Hilfe der Graßmann-Identität sowie der Produktregel für die Divergenz und die Rotation kann man Gleichung (2) in die folgende Form bringen,

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\Bigg[&-\nabla_{\vec{r}}\left(-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla_{\vec{r}\,'}\cdot\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' + \int_{\mathbb{R}^3}\nabla_{\vec{r}\,'}\cdot\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'\right)\\ &-\nabla_{\vec{r}}\times\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla_{\vec{r}\,'}\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' - \int_{\mathbb{R}^3}\nabla_{\vec{r}\,'}\times\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'\right)\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Für unseren nächsten Schritt brauchen wir einen Spezialfall des Satz von Gauß, den wir hier kurz beweisen wollen.

Es sei $V\subset\mathbb{R}^3$ kompakt mit Rand ∂V. Zeige, dass für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{f}$

$$\int_V \nabla_{\vec{r}}\times\vec{f}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r = \oint_{\partial V}\mathrm{d}\vec{S}\times\vec{f}(\vec{r})\,. \tag{4}$$

Integriere dazu die Divergenz von $\vec{c}\times\vec{f}(\vec{r})$ über das Volumen V, wobei $\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ ein beliebiger konstanter Vektor ist, und nutze die zyklische Invarianz des Spatprodukts.

(c) Wende nun Gleichung (4) und den Satz von Gauß auf Gleichung (3) an. Der Rand des $\mathbb{R}^3$ liegt im Unendlichen. Zeige, dass die Randintegrale verschwinden. Integriere dazu zuerst das isotrope Vektorfeld $\vec{G}(\vec{r}) = r^{-\alpha}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) über die Oberfläche einer Kugel mit Radius R. Finde eine Bedingung für α, so dass das Integral im Grenzfall $R \to \infty$ verschwindet.

Folgere aus diesem Ergebnis, dass die Randintegrale verschwinden, wenn $\vec{F}(\vec{r})$ im Grenzwert $r \to \infty$ schneller als $1/r$ gegen Null geht.

(d) Wir haben nun gezeigt, dass sich $\vec{F}$ aus einem Gradienten und einer Rotation zusammensetzt,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\left[-\nabla_{\vec{r}}\left(-\int_V \frac{\nabla_{\vec{r}\,'} \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'\right) - \nabla_{\vec{r}} \times \left(\int_V \frac{\nabla_{\vec{r}\,'} \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'\right)\right] .$$

Vergleiche diesen Ausdruck mit Gleichung (1), um die Funktionen Φ und $\vec{A}$ zu bestimmen.

(e) Setze abschließend für das allgemeine Vektorfeld $\vec{F}$ das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ ein und leite mit Gleichung (1) die aus der Vorlesung bekannten Zusammenhänge zwischen $\vec{E}$ und dem elektrischen Potential Φ und zwischen $\vec{B}$ und dem Vektorpotential $\vec{A}$ her.