Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 9

Abgabe am 13.06.2018 in der Vorlesung & Übung am 20.06.2018

Aufgabe 1 – Magnetisches Moment I **20 Punkte**

Das magnetische Dipolmoment einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')\,.$$

Berechne $\vec{m}$ für

(a) eine kreisförmige Stromschleife mit Radius a und stationärer Stromstärke I,

(b) eine ebene Stromschleife beliebiger Form im Abstand d vom Ursprung.

Hinweis: Wähle das Koordinatensystem in (a) so, dass die Stromschleife einen Kreis um den Ursprung in der (x, y)-Ebene bildet. Die Stromdichte läßt sich dann schreiben als $\vec{j}(\vec{r}) = I\delta(r - a)\delta(r\cos\theta)\left(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y\right)$. Warum?

Aufgabe 2 – Magnetisches Moment II **8 Punkte**

Eine Stromdichte erzeugt das Vektorpotential

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{A_0\sin\theta}{r}e^{-\lambda r}\vec{e}_\varphi\,.$$

Berechne das mit dieser Stromdichte verbundene magnetische Moment.

Aufgabe 3 – Rotierende Hohlkugel **32 Punkte**

Betrachte eine homogen geladene Hohlkugel im Vakuum mit Gesamtladung Q und Radius R, welche mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ rotiert. Bezeichne die Oberflächenladungsdichte mit σ. Das Vektorpotential dieser Anordung ist durch folgenden Ausdruck gegeben,

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R\sigma}{3}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right), & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4\sigma}{3r^3}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right), & r \geq R \end{cases}.$$

(a) Schreibe das Vektorpotentials in Kugelkoordinaten, um zu zeigen, dass $\forall\vec{r}:\ \vec{A}\left(\vec{r}\right) \parallel \hat{e}_\varphi$. Motiviere diese Richtungsabhängigkeit des Vektorpotentials kurz.
Hinweis: Zeige und benutze die Relation $\hat{e}_z = \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta$.

(b) Bestimme σ, $\rho\left(\vec{r}\right)$ und $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$.
Hinweis: $\rho\left(\vec{r}\right)$ ist zeitunabhängig (warum?) und hat eine sehr einfache Form. Benutze den Satz von Gauß, um $\vec{E}$ zu bestimmen.

(c) Bestimme $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$. Überprüfe dabei explizit, ob die Stromdichte aus der Formel $\vec{j}(\vec{r}) = \sigma\vec{v}$ konsistent mit der Stromdichte ist, welche du über $\vec{B}(\vec{r})$ aus den Maxwell-Gleichungen erhältst. Falls dies nicht der Fall ist, erkläre die Diskrepanz!
Hinweis: Für die Rotation in Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right]\hat{e}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\varphi \, .$$

Das Ergebnis für das $\vec{B}$-Feld lautet

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 R\omega\sigma}{3}\hat{e}_z, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4\omega\sigma}{3r^3}\left(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right), & r \geq R \end{cases} \, .$$

(d) Bestimme den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes.
Hinweis: Die elektromagnetische Impulsdichte ist gegeben durch

$$\vec{\Pi} = \vec{D} \times \vec{B} \, .$$