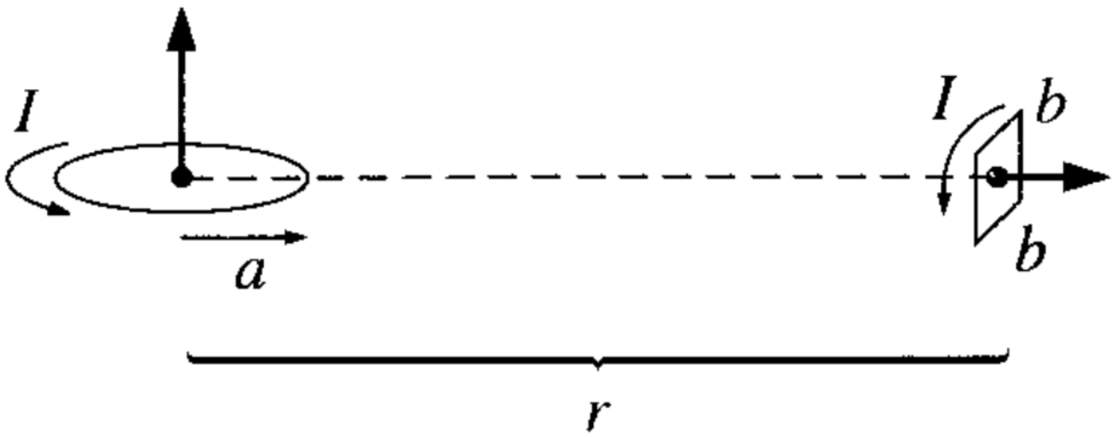
Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 10

Abgabe am 20.06.2018 in der Vorlesung & Übung am 27.06.2018

Aufgabe 1 – Drehmoment auf magnetischen Dipol **28 Punkte**



Der Abstand zwischen den Zentren einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius a und einer quadratischen Leiterschleife der Seitenlänge b beträgt $r \gg a, b$. Durch beide Schleifen laufe jeweils der Strom I. Berechne das Drehmoment $\vec{N}_{Quadrat}$, welches ausgehend von der kreisförmigen Schleife auf die quadratischen Schleife wirkt. Gehe dazu wie folgt vor:

(a) Bestimme die Dipolmomente $\vec{m}_{\text{Kreis}}$ und $\vec{m}_{\text{Quadrat}}$ der jeweiligen Schleifen.

(b) Zeige, dass

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}\,(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}$$

mit $\hat{r} \equiv \vec{r}/r$ das magnetische Feld eines Dipols mit magnetischem Dipolmoment $\vec{m}$ beschreibt.
Hinweis: Betrachte den ersten Term der Multipolentwicklung des Vektorpotentials $\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$.

(c) Ein Dipolmoment $\vec{m}$, das sich in einem externen magnetischen Feld $\vec{B}$ befindet, spürt das Drehmoment $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$. Berechne $\vec{N}_{Quadrat}$ für den oben beschriebenen Fall.
Hinweis: Beachte, dass die beiden Schleifen weit voneinander entfernt sind.

(d) Finde die Gleichgewichtsorientierung der quadratische Schleife im Fall, dass diese frei rotieren kann.

(e) Nutze das Lorentzsche Gesetz

$$\vec{F} = \int I \left(d\vec{l} \times \vec{B} \right)$$

und die Definition des Drehmoments, $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$, um zu zeigen, dass $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ auch für beliebige stationäre Ströme gilt.

Aufgabe 2 – Einfache Potentiale **12 Punkte**

Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ für folgende elektromagnetische Potentiale.

(a) Für eine Konstante q ,$\Phi(\vec{r},t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt\vec{r}}{r^3}$. Skizziere eine Ladungs- und/oder Stromverteilung, welche mit diesen elektromagnetischen Potentialen konsistent ist.

(b) Für Konstanten A_0, ω, k ,$\Phi(\vec{r},t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{e}_y$. Erfüllen diese Potentiale die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für beliebige Werte von A_0, ω und k? Wenn nein, gib Bedingungen für die drei Parameter an, für die die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

Aufgabe 3 – Kernspinresonanz **20 Punkte**

In der Kernspinresonanz werden ein statisches Magnetfeld $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ und ein hochfrequentes Magnetfeld $\vec{B}_1(t) = B_1(\cos\omega t, -\sin\omega t, 0)$ mit kleiner Amplitude B_1 benutzt, um die Spins von Atomkernen auszurichten. Die Bewegungsgleichung des magnetischen Moments lautet

$$\dot{\vec{m}} = \gamma\vec{m} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)\,,$$

wobei γ das sogenannte gyromagnetische Verhältnis bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die transversalen Komponenten des magnetischen Moments in einem mit $\vec{B}_1$ mitrotierenden Bezugssystem

$$\dot{M}_x = (\Omega_L - \omega)M_y \qquad \dot{M}_y = -(\Omega_L - \omega)M_x + \gamma B_1 m_z$$

lauten, wobei $\Omega_L = \gamma B_0$ die sogenannte Larmor-Frequenz ist. Diskutieren Sie die Trajektorien im rotierenden und im ortsfesten Koordinatensystem für den Fall $\omega = \Omega_L$.