Theoretische Elektrodynamik - SS 2018

Übungsblatt 12

Abgabe am 04.07.2018 in der Vorlesung & Übung am 11.07.2018

Aufgabe 1 – Ebene Wellen **8 Punkte**

Betrachte eine monochromatische ebene Welle mit Amplitude E_0, Frequenz ω und Phase $\varphi = 0$. Gebe die elektrische Feldstärke sowie die magnetische Induktion der Welle an, wenn die Welle sich

(a) in negativer $\vec{x}$-Richtung ausbreitet und in $\vec{z}$-Richtung polarisiert ist,

(b) vom Koordinatenursprung in Richtung des Punktes $(1, 1, 1)$ ausbreitet und in der (x, z)-Ebene polarisiert ist.

Skizziere jeweils die Welle und bestimme den Wellenvektor $\vec{k}$ sowie die Polarisationsvektor $\vec{\mathcal{E}}$ in kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 2 – Elektromagnetische Wellen in Inertialsystemen **16 Punkte**

Betrachte eine elektromagnetische Welle mit Frequenz ω, die sich in x -Richtung im Vakuum ausbreitet. Falls sie in y -Richtung polarisiert ist, kann man das elektrische Feld in einem Inertialsystem $\mathcal{S}$ folgendermaßen schreiben,

$$\vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = E_0 \cos\left(kx - \omega t\right) \hat{e}_y \,. \tag{1}$$

(a) Bestimme k sowie das magnetische Feld $\vec{B}\left(\vec{r}, t\right)$ der elektromagnetischen Welle in Gleichung (1).

(b) Bestimme $\bar{\vec{E}}\left(\bar{\vec{r}}, \bar{t}\right)$ sowie $\bar{\vec{B}}\left(\bar{\vec{r}}, \bar{t}\right)$ in einem Inertialsystem $\bar{\mathcal{S}}$, welches sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$ relativ zu $\mathcal{S}$ bewegt.

Hinweis: Falls zwei Inertialsysteme $\mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}$ sich mit Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$ (als Geschwindigkeit von $\bar{\mathcal{S}}$ relativ zu $\mathcal{S}$) zueinander bewegen, gilt

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= E_x, & \bar{E}_y &= \gamma\left(E_y - vB_z\right), & \bar{E}_z &= \gamma\left(E_z + vB_y\right), \\ \bar{B}_x &= B_x, & \bar{B}_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), & \bar{B}_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right), \end{aligned}$$

wobei $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, sowie die Lorentztransformationsgleichungen,

$$x = \gamma\left(\bar{x} + v\bar{t}\right), \quad t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right) \,.$$

Was passiert mit y und z?

(c) In Teilaufgabe (b) erhält man das Ergebnis, dass man es auch im Inertialsystem $\bar{\mathcal{S}}$ mit einer elektromagnetischen Welle der Form von Gleichung (1) zu tun hat. Bestimme die Frequenz $\bar{\omega}$ und die Wellenlänge $\bar{\lambda}$ der Welle in $\bar{\mathcal{S}}$. Interpretiere dieses Resultat (insbesondere auch den Effekt des Vorzeichens von v). Dies nennt man Doppler-Effekt. Bestimme die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle in $\bar{\mathcal{S}}$. Warum ist dieses Ergebnis sinnvoll?

(d) Bestimme die relative Intensität der elektromagnetischen Welle zwischen den Inertialsystemen $\mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}$. Diskutiere explizit den Fall $v \simeq c$.*Hinweis: Die Intensität ist proportional zum Quadrat des elektrischen Feldes.*

Aufgabe 3 – Wellenpakete und Dispersion 36 Punkte + 8 Zusatzpunkte

Bewegt sich eine elektromagnetische Welle durch ein (nicht-dissipatives) Medium, hängt ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit v_p im Allgemeinen von ihrer Frequenz ab, d.h. der Brechungsindex ist eine Funktion der Wellenzahl, $n = n(k) \in \mathbb{R}$. Man beschreibt diese Abhängigkeit üblicherweise durch eine so genannte Dispersionsrelation,

$$\omega(k) = k\frac{c}{n(k)} \ ,$$

wobei ω die Frequenz der Welle und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Im Folgenden betrachten wir den Effekt der Dispersion auf ein ebenes Wellenpaket, d.h. auf eine lineare Superpositionen von ebenen Wellen, welches sich in einer Dimension entlang der z-Achse ausbreitet,

$$\psi(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kz-\omega t)} \, \mathrm{d}k \ . \tag{2}$$

Die Funktion A beschreibt dabei die Wellenzahlverteilung des Wellenpakets und ist um eine zentrale Wellenzahl k_0 lokalisiert.

(a) Ist die Wellenzahlverteilung nicht zu breit, können wir ω um k_0 entwickeln. Zeige, dass

$$\omega(k) = \omega_0 + (k-k_0)v_\mathrm{g} + (k-k_0)^2\beta + \dots \tag{3}$$

mit $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$, $v_\mathrm{g} \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\big|_{k_0}$ und $\beta \equiv \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\big|_{k_0}$. Man bezeichnet v_g als die Gruppengeschwindigkeit und β als den Dispersionsparameter. Weiterhin definiert man $v_\mathrm{p} \equiv \omega/k$ als die Phasengeschwindigkeit.

(b) Zuerst betrachten wir ein Wellenpaket im Vakuum.

(i) Berechne v_p, v_g und β. Nuzte Gleichung (3), um zu zeigen, dass sich das Wellenpaket aus Gleichung (2) schreiben lässt als

$$\psi(z,t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \tilde{\psi}(z - v_\mathrm{g} t)$$

mit der Modulationsfunktion $\tilde{\psi}(z) = \psi(z,0)$. Interpertiere das Ergebnis. Welche Bedeutung haben ω_0, v_p und v_g?

(ii) Berechne $\tilde{\psi}$, ψ sowie die Intensität $|\psi|^2$ für eine Gaußförmige Wellenzahlverteilung der Breite Δk_0,

$$A(k) = Ce^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\Delta k_0^2}} \ ;$$

$C > 0$ dient der Normierung von A. Skizziere $|\psi|^2$.
Hinweis: Benutze quadratische Ergänzung und das Gaußintegral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

(iii) Bestimme die räumliche Breite Δz_0 der Intensitätsverteilung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Δz_0 und Δk_0 und was bedeutet er physikalisch?

(iv) Zusatzaufgabe: Bestimme $A(k)$ und $\psi(k,t)$ im Grenzfall $\Delta k_0 \to 0$.

(c) Nun betrachten wir ein Wellenpaket mit Gaußförmiger Wellenzahlverteilung in einem Medium mit der Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \sqrt{\tilde{\omega}^2 + c^2 k^2} \, .$$

$\tilde{\omega} > 0$ ist eine materialspezifische Konstante.

(i) Berechne v_p, v_g und β.

(ii) Setze die Entwicklung aus Gleichung (3) bis in zweiter Ordnung in Gleichung (2) ein und berechne ψ und $|\psi|^2$ in Abhängigkeit von ω_0, v_g und β.

(iii) Bestimme die räumliche Breite Δz der Intensitätsverteilung und vergleiche dein Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe b). Welche Bedeutung hat β?
Skizziere $|\psi|^2$ für $t = 0$ und $t > 0$.