Theoretische Elektrodynamik

Übungsklausur

maximale Punktzahl: 100

Sommersemester 2018

Diese Probeklausur entspricht im Aufbau der richtigen Klausur und liefert Beispiele für verschiedene Aufgabentypen, welche in der Klausur vorkommen können. Auch deren Umfang ist vergleichbar zu dem dieser Probeklausur. Die Bearbeitungszeit beträgt drei volle Zeitstunden. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
Die Bearbeitung der Probeklausur ist freiwillig. Am Donnerstag den **12.07.2018** wird es anstelle der Vorlesung eine Fragestunde geben, in der ggf. auch die Lösungen der Probeklausur besprochen werden.

Aufgabe 1 – Theoriefragen **34 Punkte**

Beantworte die folgenden Fragen kurz und ohne ausführliche Rechnungen.

1. Skizziere die Feldlinien eines elektrischen Punktdipols. [4P]

2. Wie lautet der Exponent in der Proportionalität $\sim \frac{1}{r^n}$ für das Fernfeld des Potentials eines elektrischen Monopols, Dipols sowie eines elektrischen Quadrupols? [3P]

3. Gib ein physikalisches Beispiel für ein Problem, welches durch eine partielle Differentialgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen beschrieben wird. Erkläre den Unterschied zwischen Dirichlet Randbedingungen und von Neumann Randbedingungen. [5P]

4. Gib das Biot-Savart Gesetz an. [2P]

5. Nenne die Definition des Poynting-Vektors? Was ist dessen physikalische Bedeutung? [2P]

6. Was versteht man unter der Eichfreiheit der Potentiale in der Elektrodynamik? Gib ein Beispiel für eine Eichtransformation an. [3P]

7. Notiere die Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke und die magnetische Induktion im Vakuum. [4P]

8. Leite die Wellengleichung für die magnetische Induktion im Vakuum aus den Maxwell-Gleichungen im Orts-Zeit-Raum her. Wie lautet die Wellengleichung im Wellenzahl-Kreisfrequenz-Raum? [5P]

9. Notiere das $\vec{E}$-Feld und das $\vec{B}$-Feld einer linear polarisierten elektromagnetischen Welle im Vakuum, wobei $\vec{E}(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) = E_0 \hat{e}_x$. Die Welle habe Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω und breite sich in negative y-Richtung aus. Skizziere das elektrische und magnetische Feld in einer sinnvoll gewählten Ebene zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$. [6P]

Aufgabe 2 – Unendlich langer Draht **22 Punkte**

Betrachte einen unendlich langen Draht im Vakuum entlang der z-Achse. Er trägt eine konstante Linienladungsdichte λ sowie einen stationären, homogenen Strom I, welcher in positive z-Richtung fließt.

(a) Bestimme das elektrische Feld sowie das Magnetfeld, welches durch diesen Draht hervorgerufen wird. [9P]

(b) Berechne das elektrostatische Potential sowie das Vektorpotential des Drahtes. [7P]
Hinweis: Für die Rotation in Zylinderkoordinaten gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{e}_z\,.$$

(c) Wie groß muss die Geschwindigkeit eines Teilchens mit Ladung q sein, sodass es sich in einer geraden Linie im Abstand d parallel zu diesem Draht bewegt? [6P]

Aufgabe 3 – Elektrischer Dipol **20 Punkte**

Betrachte eine Punktladung mit Ladung q am Ort $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (mit $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < R^2$), sowie eine homogen geladene, unendlich dünne, nicht-leitende Hohlkugel mit Radius R, Oberflächenladungsdichte σ und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die beiden Objekte befinden sich im Vakuum.

(a) Bestimme die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Berechne die Gesamtladung. [4P]

(b) Bestimme das Dipolmoment bezüglich des Koordinatenursprungs sowie das elektrisches Feld der Ladungsverteilung für den Fall $\vec{r}_0 = \vec{0}$. [6P]

(c) Bestimme das Dipolmoment bezüglich des Koordinatenursprungs sowie das elektrisches Feld der Ladungsverteilung für den Fall $\vec{r}_0 \neq \vec{0}$. [6P]

(d) Diskutiere folgende Hypothese: 'Es sei $q \neq 0$ gegeben. Die einzige Wahl der Parameter aus der Aufgabenstellung, sodass eine Probeladung an einem beliebigen Ort außerhalb der Hohlkugel keine Kraftwirkung erfährt, ist gegeben durch $\sigma = -\frac{1}{4\pi R^2}q$ und $\vec{r}_0 = \vec{0}$.' [4P]
Hinweis: Falls du vermutest, dass die Hypothese falsch ist, versuche ein explizites Gegenbeispiel zu finden. Falls du vermutest, dass sie korrekt ist, zeige dass die gegebenen Parameter (also σ und $\vec{r}_0$) tatsächlich das behauptete Verhalten hervorrufen und dass sie die einzige Wahl dieser Parameter darstellen.

Aufgabe 4 – Magnetfeld eines Vollzylinders **24 Punkte**

Ein unendlich langer Vollzylinder ($\mu_r = 1$) vom Radius R führe die konstante Stromdichte $\vec{j}_0$.

1. Gebe die Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r})$ explizit an. [4P]

2. Berechne das Vektorpotential, mit der Randbedingung $\vec{A}(\vec{0}) = \vec{0}$, und die Magnetfeldstärke innerhalb und außerhalb des Leiters durch Lösen der Poisson-Gleichung für das Vektorpotential, [12P]
$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}.$$
Hinweis: Überlege zunächst, welche Richtung und welche Koordinatenabhängigkeit $\vec{A}\,(\vec{r})$ *aufgrund der Symmetrie haben muss. Der skalare Laplace-Operator in zylindrischen Koordinaten lautet*
$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$
Nutze die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{A}$ *und* $\vec{B}$ *um die Integrationskonstanten, die bei der Lösung der Poisson-Gleichung erscheinen, zu bestimmen.*

3. Überprüfe das Ergebnis für das Magnetfeld mit Hilfe des Stokesschen Satzes. [8P]