Prof. Dr. Martin E. Garcia
Bernd Bauerhenne
Tobias Zier

Universität Kassel
Fachbereich 10
Theoretische Physik

SS 2014

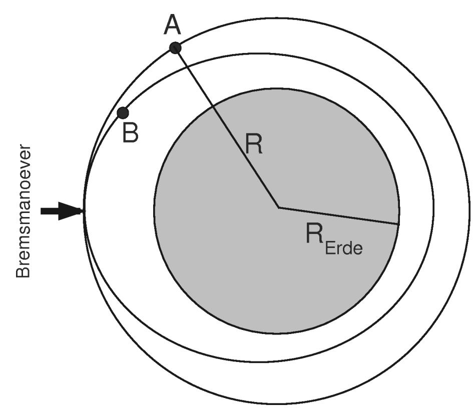
Übungen zur Vorlesung *Theoretische Mechanik*

Übung 10

Abgabe: Mittwoch, den 02.07.2014 in der Vorlesung

Aufgabe 1

5 Punkte



Die Satelliten A und B werden vom demselben Weltraumbahnhof mit einem Zeitabstand $\Delta t = 12$ min in die selbe kreisförmige Erdumlaufbahn geschossen mit Bahnradius R und mit Geschwindigkeiten $v_A = v_B = 7$ km/s. Um ein Rendezvous zu erreichen, wird der später abgeschossene Satellit B in der Erdumlaufbahn durch Zünden der Bremsraketen kurz abgebremst. Dadurch verliert er Energie und nimmt eine Ellipsenbahn mit großer Halbachse $a < R$ ein. Das Zusammentreffen soll erfolgen, wenn der Satellit B nach der Abbremsung die *erste* Ellipsenbahn vollständig durchlaufen hat und im Aphel seine alte Kreisbahn kurz berührt. Die Umlaufzeit der Ellipse muss daher 12 min kürzer sein als die Umlaufzeit der Kreisbahn. Um welche Geschwindigkeit muss der Satellit B abgebremst werden?

Hinweis: Nach dem Dritten Kepler'schen Gesetz sind die Quadrate der Umlaufzeiten T näherungsweise proportional zu der dritten Potenz der großen Halbachsen a. Gravitationskonstante γ, Erdradius R_E und Erdmasse m_E betragen

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}, \qquad R_E = 6370\,\mathrm{km}, \qquad m_E \simeq 5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

Aufgabe 2

2+2 Pkt.

Kreisbahnen sind in allen anziehenden, rotationssymetrischen Zentralkraftfeldern möglich. Betrachten Sie das effektive Potential.

(a) Für welche Hochzahlen n besitzt das Potential $V(r) = -\alpha\, r^n$ stabile Kreisbahnen.

(b) Für welchen Parameter r_0 hat das Potential $V(r) = -\frac{\alpha}{r}\, e^{\frac{r}{r_0}}$ stabile Kreisbahnen.

Bitte wenden

Aufgabe 3

5 Punkte

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma(\Theta)$ für die Streuung im abstoßenden Zentralkraftfeld

$$V(r) = \frac{\beta}{r^2}$$

mit $\beta > 0$.

Aufgabe 4

7 Punkte

Wir betrachten ein mechanisches System mit den N generalisierten Koordinaten $\{q_1, \ldots, q_N\}$. Weiter treten Reibungskräfte $\vec{R}_i$ im System auf. Hierbei ist $\vec{R}_i$ die Reibungskraft auf das i-te Teilchen. Lassen sich alle Reibungskräfte, was meistens erfüllt ist, in der Form

$$\vec{R}_i = -h_i\big(|\vec{v}_i|\big)\,\frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|}, \qquad i = 1, \ldots, N$$

darstellen, wobei $\vec{v}_i$ die Geschwindigkeit des i-ten Teilchens ist, so kann man eine Reibungsfunktion bzw. Dissipationsfunktion P gemäß

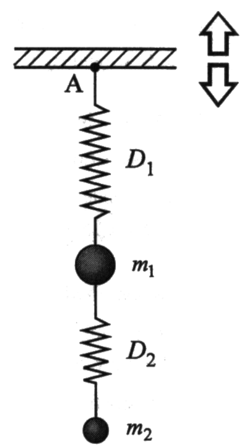
$$P = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{|\vec{v}_i|} h_i(v)\,dv$$

definieren. Mit dieser Funktion können die Lagrange-Gleichungen auf Reibungskräfte erweitert werden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Der Aufhängepunkt A des in der Abbildung rechts dargestellten Systems macht harmonische, vertikale Schwingungen

$$x_A(t) = A\,\cos(\Omega\,t).$$



Auf die beiden Massen wirken die Federkräfte und die durch die Luft erzeugten Reibungskräfte $R_i = -c_i\,\dot{x}_i,\ i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass die Masse m_1 nach Beendigung der Einschwingung nahezu in Ruhe bleibt, wenn

$$\Omega = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}}$$

gilt und c_2 sehr klein ist.

Hinweis: Wegen der Geschwindigkeit $\dot{x}_i$ in den Differentialgleichungen ist es sinnvoll, mit komplexen Exponentialfunktionen zu arbeiten. Dabei muss die Schwingung des Aufhängepunktes A komplex angesetzt werden:

$$x_A(t) = A\,e^{i\,\Omega\,t}.$$

Am Ende der Rechnung müssen dann allerdings die imaginären Anteile gestrichen werden.

Viel Erfolg