Prof. Dr. Martin E. Garcia
Bernd Bauerhenne
Tobias Zier

Universität Kassel
Fachbereich 10
Theoretische Physik

SS 2014

Übungen zur Vorlesung *Theoretische Mechanik*

Übung 4

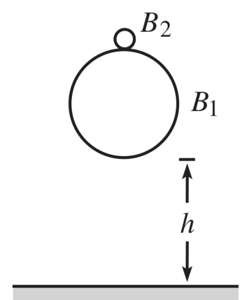
Abgabe: Mittwoch, den 21.05.2014 in der Vorlesung

Aufgabe 1

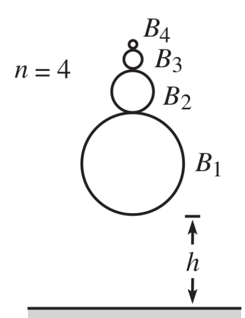
2+2+2+2 Pkt.

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Kollidieren in einer Dimension zwei Massen m_1 und m_2 mit der Relativgeschwindigkeit v elastisch miteinander, so beträgt nach dem Stoß die Relativgeschwindigkeit $-v$.

(b) Ein Tennisball mit einer kleinen Masse m_2 liegt auf einem Basketball mit einer großen Masse $m_1 >> m_2$. Der unterste Punkt des Basketballs befindet sich in einer Höhe h über dem Boden, während sich der unterste Punkt des Tennisballes in einer Höhe $h + d$ über dem Boden befindet. Die Bälle werden fallen gelassen. Wie hoch springt der Tennisball?
Nehmen Sie an, dass die Bälle elastisch miteinander stoßen. Daher können Sie Aufgabenteil (a) verwenden. Weiter sollen die Bälle instantan springen und es existiere anfangs eine kleine Distanz zwischen den Bällen. Vernachlässigen Sie die Luftreibung.



(c) Nun nehmen Sie einen Turm aus n Bällen an, $B_1, B_2, ..., B_n$ mit den zugehörigen Massen $m_1, ..., m_n$. Für die Massen gelte: $m_1 >> m_2 >> ... >> m_n$. Der unterste Punkt von B_1 befindet sich in der Höhe h über dem Boden. B_n befindet sich in einer Höhe von $h+l$. Die Bälle werden wieder fallen gelassen. Wie hoch springen die Bälle in Abhängigkeit von n?

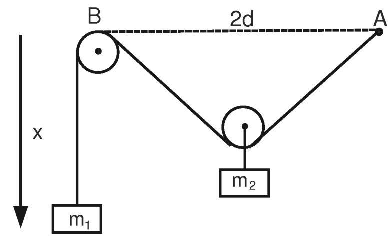


(d) Angenommen $h = 1$ m, wie viele Bälle braucht man mindestens, damit der oberste Ball mindestens 1km hoch springt oder die Fluchtgeschwindigkeit ($v_F \approx 11200\frac{\text{m}}{\text{s}}$) der Erde erreicht? Nehmen Sie an, dass die Bälle elastisch stoßen und l vernachlässigbar klein ist.

Bitte wenden

Aufgabe 2

4 Punkte



Wir betrachten ein System, das aus Rollen, Seilen und Massen besteht, wie es in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist. Ein masseloses Seil der Länge b ist am Punkt A befestigt, geht über eine Rolle (Punkt B), die auf Distanz $2\,d$ enfernt ist, und hat die Masse M_1 am Ende. Eine Rolle mit der Masse M_2 hängt an dem Seil zwischen A und B. Man berechne x im Gleichgewicht und bestimme, ob dieses Gleichgewicht stabil ist. Die Rollen seien masselos.

Aufgabe 3

4 Punkte

Man zeige, dass sich die Wirkung bei einer Galilei–Transformation entsprechend

$$S' = S + m\,\vec{v}\cdot\vec{r}_s(t) + \frac{m}{2}\,v^2\,t$$

transformiert. Dabei ist m die Gesamtmasse des Systems, $\vec{v}$ die Relativgeschwindigkeit beider Bezugssysteme und $\vec{r}_s(t)$ die Position des Schwerpunktes im alten Bezugssystem.

Aufgabe 4

2+2+2 Pkt.

(a) Wir betrachten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\,dx, \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Beweisen Sie:
Wenn F nicht explizit von x abhängt, dann gilt

$$F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} = const.$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in einer Ebene.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf dem Zylindermantel.

Viel Erfolg