

Übungen zur Vorlesung *Theoretische Mechanik*

Übung 7

Abgabe: Mittwoch, den 11.06.2014 in der Vorlesung

Aufgabe 1 Bonus

5 Punkte

Zeigen Sie, dass die Wirkung

$$S = \int_0^{t_2} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{D}{2} x^2 \right] dt$$

des harmonischen Oszillators für die Bewegung $x(t) = A \sin(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ weder minimal noch maximal ist, falls t_2 größer als die halbe Schwingungsdauer $\frac{T}{2}$ ist.

Hinweis: Setzen Sie $\hat{x}(t) = x(t) + \alpha \eta(t)$ mit $\eta(0) = \eta(t_2) = 0$ in S ein und integrieren Sie partiell. Untersuchen Sie den zu α^2 proportionalen Term mit den Abweichungen, wobei b_k beliebige Konstanten sind:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{t_2} t\right).$$

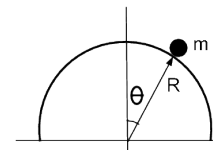
Nützlich ist auch das folgende Integral

$$\int_0^{t_2} \sin\left(\frac{k\pi}{t_2} t\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{t_2} t\right) dt = \frac{t_2}{2} \delta_{k\ell}.$$

Aufgabe 2

5 Punkte

Eine kleine Kugel der Masse m befindet sich ruhend auf dem höchsten Punkt einer Halbkugel mit Radius R . Bestimmen Sie die Zwangskraft, die die Kugeloberfläche auf die Masse m ausübt, sowie den Winkel, bei dem die Masse m die Halbkugel verlässt.



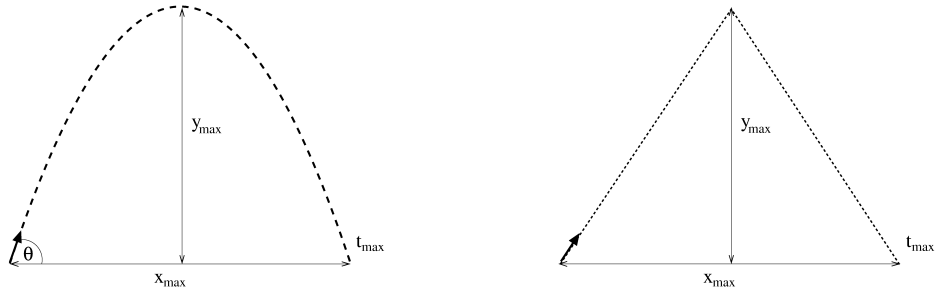
Hinweis: Formulieren Sie eine holonome Zwangsbedingung und untersuchen Sie das Verhalten der Zwangskraft. Um die Zwangskraft zu bestimmen, nutzen Sie für die Gleichung der Form $\ddot{x} = f(x)$ den Gedanken $\ddot{x} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$, um zur Integration $\int \dot{x} d\dot{x} = \int f(x) dx$ zu kommen.

Bitte wenden

Aufgabe 3

2+2+2+2 Pkt.

Man beschreibe den schrägen Wurf mit Hilfe der Lagrange-Mechanik. Ein Teilchen der Masse m wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})^t$ unter einem Winkel θ geworfen. Die Erdbeschleunigung sei g .



- Schreiben Sie die Lagrange-Funktion und leiten Sie daraus die Lagrange-Gleichungen ab. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Abschuss im Nullpunkt.
- Berechnen Sie die maximale Höhe y_{max} , die Reichweite x_{max} und die Zeit bis zum Einschlag auf den Boden t_{max} .
- Bestimmen Sie auch die Wirkung S zwischen $t = 0$ und $t = t_{max}$.
- Man nehme jetzt an, die Teilchenbahn bestehe aus zwei geraden Linien und die Teilchengeschwindigkeit sei konstant und gegeben durch

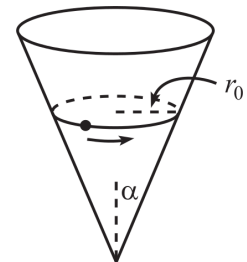
$$|\vec{v}_1| = 2 \frac{\sqrt{\frac{x_{max}^2}{4} + y_{max}^2}}{t_{max}}.$$

Bestimmen Sie die über den neuen Pfad entstehende Wirkung S' und vergleichen Sie sie mit S . Ist S' ein Extremum? Begründen Sie die Antwort.

Aufgabe 4

2+2+2 Pkt.

Ein Partikel gleite auf der inneren Fläche eines reibungsfreien Kegels. Man nehme an, dass der Kegel mit seiner Spitze am Boden befestigt sei und seine Achse die Vertikale sei. Es seien α der Halbwinkel an der Spitze, r die Distanz des Partikels zur Achse und θ der Winkel um den Kegel herum.



- Man finde die Bewegungsgleichungen.
- Finden Sie die Kreisfrequenz ω für den Fall, dass sich der Partikel auf einem Kreis mit Radius r_0 im Kegel bewegt.
- Es wird der Partikel geringfügig gestört, d.h. $r(t) = r_0 + \delta(t)$ mit $\delta(t) \ll 1$. Wie groß ist jetzt die Kreisfrequenz Ω , mit der sich bei der Bewegung des Partikels der Radius r periodisch ändert. Unter welchen Bedingungen gilt $\omega = \Omega$.

Viel Erfolg