Prof. Dr. Martin E. Garcia
Bernd Bauerhenne
Tobias Zier

UNIVERSITÄT KASSEL
FACHBEREICH 10
Theoretische Physik

SS 2014

Übungen zur Vorlesung *Theoretische Mechanik*

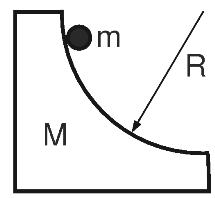
Übung 8

Abgabe: Mittwoch, den 18.06.2014 in der Vorlesung

Aufgabe 1

6 Punkte

Ein Teilchen der Masse m gleitet an einem Gewicht der Masse M herunter, wie in der rechts stehenden Abbildung dargestellt. Letzteres ruht anfangs, ist jedoch in horizontaler Richtung beweglich. Finden Sie die Bewegungsgleichungen für m und M, sowie die Gleichung für die Zwangskraft, die das Gewicht M auf das Teilchen m ausübt.



Hinweis: Stellen Sie eine geeignete Nebenbedingung auf und verwenden Sie die Lagrangegleichungen mit Lagrange-Multiplikator.

Aufgabe 2

2+2+2 Pkt.

Wir betrachten die Bewegung einer Masse m im Potential der Form

$$V(r) = -\alpha \, \frac{1}{r^n}$$

mit Drehimpuls p_ϕ ungleich Null. Hierbei ist α eine beliebige Konstante.

(a) Wieso kann die Masse unter den drei folgenden Bedingungen trotz Drehimpuls ungleich Null ins Zentrum stürzen:

   (i) $n = 2$ und $\alpha = \frac{p_\phi^2}{2\,m}$

   (ii) $n = 2$ und $\alpha > \frac{p_\phi^2}{2\,m}$

   (iii) $n > 2$ und $\alpha > 0$

(b) Bestimmen Sie für die drei oben genannten Fälle, ob die Zahl der Umläufe beim Sturz in Zentrum endlich oder unendlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass die für den Fall ins Zentrum benötigte Zeit stets endlich ist und die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit immer gegen unendlich gehen.

Bitte wenden

Aufgabe 3

2+2+2 Pkt.

Eine Masse m ist an einem elastischen Seil der ungedehnten Länge L und Federkonstanten D befestigt. Das masselose Seil rotiert in der horizontalen Ebene, wobei ein Ende im Koordinatenursprung ruht. Der konstante Drehimpuls der Masse m sei p_ϕ. Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen näherungsweise und berechnen Sie die Korrekturen zur ungestörten

(a) Vibrationsfrequenz $\omega_\nu = \sqrt{\frac{D}{m}}$,

(b) Rotationsfrequenz $\omega_r = \frac{p_\phi}{m\,L^2}$.

(c) Angenommen die Masse bewegt sich mit konstantem ω_ν und ω_r, unter welchen Bedingungen wird die Kreisbahn abgeschlossen?

Aufgabe 4

3+3 Pkt.

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Potential

$$V(r) = V_0\, e^{-\lambda^2 r^2}.$$

Betrachten Sie das zugehörige effektive Potential V_{eff}.

(a) Bestimmen Sie zu gegebenen Drehimpuls L den Radius R der stabilen Kreisbahn. Hier reicht eine implizite Gleichung zur Bestimmung von R aus.

(b) Man wird bei (a) herausfinden, dass für einen zu großen Drehimpuls L keine Kreisbahnen existieren können. Was ist der größte mögliche Drehimpuls, bei dem noch eine Kreisbahn existiert? Wenn R_0 der Radius dieser Kreisbahn für den größten möglichen Drehimpuls ist, wie groß ist $V_{eff}(R_0)$?

Viel Erfolg