

Übungen zur Vorlesung *Theoretische Mechanik*

Übung 9

Abgabe: Mittwoch, den 25.06.2014 in der Vorlesung

Aufgabe 1

3+2+2 Pkt

Es gibt unendlich viele Kräfte $\vec{F}(\vec{r})$, welche einen Körper auf einem Orbit $r(\varphi)$ laufen lassen. Im Falle einer Zentralkraftbewegung jedoch kann man

$$f(r) := -\frac{dV}{dr}$$

und somit auch die Kraft *eindeutig* aus der Bahn ableiten.

(a) Man beweise

$$-\frac{dV}{dr} = f(r) = \frac{p_\varphi^2}{m r^4} \left[\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \right].$$

(b) Man zeige, dass $f(r) \sim r^{-2}$ für einen Körper gilt, der sich auf einer Ellipse in einem Zentralkraftfeld, dessen Ursprung einer der Brennpunkte der Ellipse ist, bewegt.

(c) Es gelte $r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi}$. Man zeige, dass $f(r) \sim r^{-3}$.

Aufgabe 2

5 Punkte

Beweisen Sie, dass das Keplerpotential neben dem Drehimpuls und der Energie noch eine weitere Erhaltungsgröße hat, den sog. Lenzschen Vektor

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m \alpha} - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Zeigen Sie auch, dass $\vec{\Lambda}$ zum Perihel der Bahnkurve zeigt und $|\vec{\Lambda}|$ die Exzentrizität ε ist.

Hinweis: Da $\vec{\Lambda}$ in der Bahnebene liegt und ε eine Funktion der Energie und des Drehimpulses ist, bildet der Lenzsche Vektor nur eine einzelne weitere, unabhängige Erhaltungsgröße, nämlich die Konstanz der Perihelrichtung.

Bitte wenden

Aufgabe 3

5 Punkte

Ein Komet der Masse m bewegt sich in einer parabelförmigen Bahn um einen Planeten mit der Masse M , dem Radius R und der konstanten Massendichte ρ . Die Wechselwirkung zwischen den beiden Körpern sei durch die Gravitation mit der Gravitationskonstanten G gegeben. Der Komet streife auf seiner Bahn die Oberfläche des Planeten am Punkt des geringsten Abstandes. Bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die Winkelgeschwindigkeit ω des Kometen relativ zum Zentrum des Planeten.

Aufgabe 4

5 Punkte

Zwei Massen m und $2m$ kreisen um ihren Schwerpunkt. Bei kreisförmigen Bahnen gibt es keinen Schnittpunkt. Sind die Bahnen jedoch sehr elliptisch, dann schneiden sie sich. Bei welcher minimalen Exzentrizität ε beginnen sich die Bahnen zu schneiden? Sie können annehmen, dass der Schwerpunkt sich nicht bewegt.

Viel Erfolg