Übungszettel 1 - Gottes Würfel und Bohr-Heisenbergs Beitrag (Abgabetermin: 24.10.2017)

Aufgabe 1 - Wahrscheinlichkeitsverteilungen (30 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\rho(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Diese sollen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens in verschiedenen Regionen der reellen Achse beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit $P_\rho([a,b])$ das Objekt in einem Intervall $[a,b]$ zu finden ist durch folgenden Ausdruck gegeben,

$$P_\rho([a,b]) = \int_a^b \rho(x)\ dx\,.$$

(a) Begründe, warum $\forall x : \rho(x) \in \mathbb{R}_0^+$ gelten muss. Begründe außerdem, warum folgende Relation gelten muss,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\ dx = 1\,. \tag{1}$$

Gleichung (1) nennt man auch die Normierungsbedingung.

(b) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Teilchens, welches sich nur im Intervall $[0,1]$ aufhalten kann, dort aber mit konstanter Wahrscheinlichkeit. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Intervall $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ zu finden?
Zusatzaufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Punkt $\frac{1}{2}$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen bei irgendeiner rationalen Zahl zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen bei irgendeiner irrationalen Zahl zu finden? Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Nullmenge!

(c) Man definiert den Erwartungswert μ und die sogenannte Varianz σ^2 einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\ dx, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \rho(x)\ dx\,.$$

Bestimme Erwartungswert und Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teilaufgabe (b).

(d) Die sogenannte Gaußverteilung ist durch folgenden Ausdruck gegeben ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$),

$$\rho_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,. \tag{2}$$

Bestimme Erwartungswert und Varianz der Gaußverteilung.
Hinweis: Es gilt $\forall a > 0,\ b \in \mathbb{R}$, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a(x-b)^2}\ dx = b\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\ dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

(e) Betrachte die Gaußverteilung mit $\mu = 1$. Skizziere die Gaußverteilung für $\sigma = 1$, $\sigma = 0.5$ und $\sigma = 0.1$. Was geschieht anschaulich im Grenzwert $\sigma \to 0$? Welcher "Funktion" entspricht dieser Grenzwert?

(f) Der Erwartungswert $\langle f(x)\rangle_\rho$ einer Funktion $f(x)$ in Bezug auf eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x)$ ist gegeben durch

$$\langle f(x)\rangle_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x)\ dx\,.$$

Zeige, dass die Erwartungswerte der Monome x^n ($n \in \mathbb{N}_0$) für eine Gaußverteilung nach Gleichung (2) mit $\mu = 0$ durch folgenden Ausdruck gegeben sind,

$$\langle x^n\rangle_{\rho_G} = \sigma^n \frac{\left(1+(-1)^n\right)}{2}(n-1)!!\,.$$

Hinweis: Um die Rolle des Faktors $\frac{(1+(-1)^n)}{2}$ zu verstehen, überlege dir, welche beiden Fälle hierdurch unterschieden werden. Für die sogenannte Doppelfakultät gilt $(-1)!! = 0!! = 1$ sowie

$$a!! = \begin{cases} a\cdot(a-2)\cdot(a-4)\cdot\dots\cdot 4\cdot 2, & \textit{falls } a \textit{ gerade und nicht null} \\ a\cdot(a-2)\cdot(a-4)\cdot\dots\cdot 3\cdot 1, & \textit{falls } a \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Relation $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\frac{\sigma^2}{x}\frac{d}{dx}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ist nützlich. Außerdem gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0:\ \lim_{x\to\pm\infty} x^\alpha e^{-\beta x^2} = 0$.

(g) In der Quantenmechanik ergibt sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens als Betragsquadrat seiner komplexen Wellenfunktion $\psi(x) \in \mathbb{C}$, also $\rho(x) = |\psi(x)|^2$. Gib einen Ausdruck für *alle* möglichen Wellenfunktionen an, deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit einer Gaußverteilung nach Gleichung (2) entspricht.