Übungszettel 10 - Frohe Weihnachten und Guten Rutsch! (Abgabe: Vorlesung 09.01.2018 *oder* 10.01.2018 bis 11:15 im Fach)

Aufgabe 1 - Dirac-Bild und RWA (30 Punkte)

Betrachte ein Atom, welches mit einem Laserfeld der Frequenz ω_L angeregt werden soll (siehe Abbildung 1 unten). Das Atom befinde sich im Grundzustand $|0\rangle$ und die Frequenz ω_L sei so gewählt, dass sie nur zu genau einem erlaubten Übergang auf einen angeregten Zustand $|1\rangle$ nah resonant ist, also in guter Approximation nur dieser Übergang angeregt wird. In diesem Fall kann man als sinnvolle Näherung alle anderen Energieniveaus ignorieren und das Atom unter dem Einfluss des Laserfelds als ein Zwei-Niveau-System mit der Orthonormalbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ modellieren.
Bei $t_0 = 0$ soll das Schrödinger-Bild mit dem Dirac-Bild für dieses Problem identisch sein.

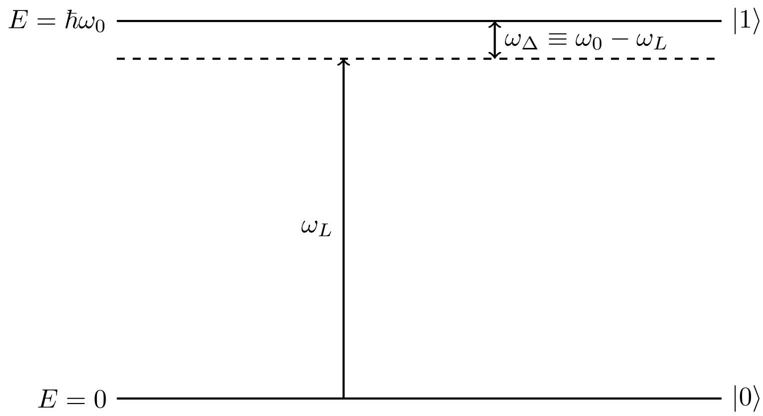

Abbildung 1: Zwei-Niveau-System mit nahresonanter Laseranregung der Frequenz ω_L

(a) Betrachte den freien Hamiltonoperator $\hat{H}_0$, welcher durch folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 |1\rangle\langle 1| \ .$$

Bestimme die Eigenwerte von $\hat{H}_0$, und schreibe $\hat{H}_0$ in Matrixnotation bezüglich der Orthonormalbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

(b) Definiere den Dipoloperator

$$\hat{\vec{\mu}} = \vec{\mu}\,|1\rangle\langle 0| + \vec{\mu}^*\,|0\rangle\langle 1| \ ,$$

mit beliebigem $\vec{\mu} \in \mathbb{C}^3$. Sei $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega_L t} + \vec{E}_0^* e^{i\omega_L t}$ (mit $\vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3$) das elektrische Feld des mit der Frequenz ω_L schwingenden Laserfelds. Zeige, dass der Wechselwirkungshamiltonoperator $\hat{H}_I(t)$, welcher über

$$\hat{H}_I(t) \equiv -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{E}(t)$$

definiert ist, als folgender Ausdruck

$$\hat{H}_I(t) = -\hbar\left(\Omega e^{-i\omega_L t} + \bar{\Omega} e^{i\omega_L t}\right)|1\rangle\langle 0| - \hbar\left(\bar{\Omega}^* e^{-i\omega_L t} + \Omega^* e^{i\omega_L t}\right)|0\rangle\langle 1| \ .$$

geschrieben werden kann. Hierbei ist $\Omega = \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{E}_0}{\hbar}$ die so genannte Rabi-Frequenz und $\bar{\Omega} = \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{E}_0^*}{\hbar}$ die gegenläufige Rabi-Frequenz.

(c) Es sei

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_I(t)$$

der Gesamt-Hamiltonoperator des Systems im Schrödinger-Bild. Schreibe den Gesamt-Hamiltonoperator in Matrixnotation bezüglich der Orthonormalbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
Zeige, dass der Gesamt-Hamiltonoperator im Dirac-Bild, $\hat{H}_D(t)$, durch folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$\hat{H}_D(t) = \hat{H}_0 - \hbar\left(\Omega e^{i\omega_\Delta t} + \bar{\Omega} e^{i(\omega_L+\omega_0)t}\right)|1\rangle\langle 0| - \hbar\left(\bar{\Omega}^* e^{-i(\omega_L+\omega_0)t} + \Omega^* e^{-i\omega_\Delta t}\right)|0\rangle\langle 1| \ .$$

Hinweis: Benutze und beweise durch Reihenentwicklung der Exponentiale die Relationen

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\left|1\right\rangle &= e^{i\omega_o t|1\rangle\langle 1|}\left|1\right\rangle = e^{i\omega_0 t}\left|1\right\rangle \,, \\
e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\left|0\right\rangle &= e^{i\omega_o t|1\rangle\langle 1|}\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle
\end{aligned}
$$

sowie ihre hermitesch adjungierten Ausdrücke.

(d) Nimm an, dass $\omega_L + \omega_0 \gg \omega_\Delta \equiv \omega_0 - \omega_L$. In diesem Fall werden sich alle Terme proportional $e^{\pm i(\omega_L+\omega_0)t}$ im Hamiltonoperator schon über kurze Zeitintervalle rasch herausmitteln. Diese Terme sind daher vernachlässigbar. Unter Verwendung dieser so genannten "rotating wave approximation" (RWA), schreibe den genäherten Hamiltonoperator $\hat{H}_D^{RWA}(t)$ im Dirac-Bild auf.

(e) Zeige durch Rücktransformation, dass der RWA-Hamiltonoperator im Schrödinger-Bild durch den Ausdruck

$$\hat{H}^{RWA}(t) = \hbar\omega_0 \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| - \hbar\Omega e^{-i\omega_L t}\left|1\right\rangle\left\langle 0\right| - \hbar\Omega^* e^{i\omega_L t}\left|0\right\rangle\left\langle 1\right|$$

gegeben ist. Schreibe $\hat{H}^{RWA}(t)$ in Matrixnotation bezüglich der Orthonormalbasis $\{\left|0\right\rangle, \left|1\right\rangle\}$.

(f) Finde eine unitäre Transformation $\hat{U}(t)$, um die verbliebende Zeitabhängigkeit von $\hat{H}^{RWA}(t)$ zu eliminieren, also $\frac{\partial}{\partial t}\hat{H}_0^{RWA} = 0$, wobei

$$\hat{H}_0^{RWA} = \hat{U}(t)\,\hat{H}^{RWA}(t)\,\hat{U}^\dagger(t)\ .$$

Hinweis: Suche nach einer unitären Transformation der Form

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma(t) \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix bezüglich der Orthonormalbasis $\{\left|0\right\rangle, \left|1\right\rangle\}$ *dargestellt ist. Wann ist* $\hat{U}(t)$ *unitär?*

Aufgabe 2.1 - Klausurbeispiel I (18 KPunkte ≡ 10.8 Punkte)

Es sei folgender Hamiltonoperator im Schrödingerbild gegeben,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\,.$$

(a) Berechne im Heisenbergbild $\frac{d}{dt}\hat{x}_H(t)$ sowie $\frac{d}{dt}\hat{p}_H(t)$.

(b) Zeige, dass die folgenden beiden Gleichungen gelten,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\hat{x}_H(t) + \omega^2\hat{x}_H(t) &= 0\,, \\
\frac{d^2}{dt^2}\hat{p}_H(t) + \omega^2\hat{p}_H(t) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.2 - Klausurbeispiel II (24 KPunkte ≡ 14.4 Punkte)

Betrachte die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödingergleichung mit folgendem Potential ($V_0 > 0, a > 0$),

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ V_0, & 0 < x < a \\ \frac{V_0}{2}, & a \leq x \end{cases}\ .$$

(a) Skizziere das Potential. Welche Energiewerte sind allgemein verboten? Ist das Spektrum diskret oder kontinuierlich im erlaubten Energiebereich? Zu welchen Energiewerten sind Streuzustände beziehungsweise gebundene Zustände zu erwarten?

(b) Bestimme die allgemeine Form der Lösungswellenfunktionen für dieses Potential für eine von $x = -\infty$ einfallende Materiewelle $\varphi_0(x) = e^{ik_0 x}$ für den Fall, dass die Energie dieser Materiewelle E kleiner als V_0 ist. Skizziere die zu erwartenden Wahrscheinlichkeitsdichten für diese Lösungswellenfunktionen.

(c) Notiere, unter Benutzung der physikalischen Bedingungen an die Wellenfunktion, einen Satz von Gleichungen, der die freien Koeffizienten im Ansatz aus Teilaufgabe (b) eindeutig bestimmt. Das Gleichungssystem soll nicht gelöst werden.

(d) Bestimme den Transmissionskoeffizienten bei $x = 0$, falls die Energie der Materiewelle E kleiner als $\frac{V_0}{2}$ ist.

Aufgabe 2.3 - Klausurbeispiel III (18 KPunkte ≡ 10.8 Punkte)

Betrachte den so genannten Paritätsoperator $\hat{\Pi}$, welcher in der Ortsdarstellung folgendermaßen wirkt: $\hat{\Pi}(x)\,\psi(x) = \psi(-x)$.

(a) Ist $\hat{\Pi}$ hermitesch? Ist $\hat{\Pi}$ unitär?

(b) Bestimme die Eigenwerte von $\hat{\Pi}$.

(c) Es sei $\mathcal{H}$ ein beliebiger Hilbertraum. Die Eigenräume von $\hat{\Pi}$ zerlegen den Hilbertraum $\mathcal{H}$ in eine direkte Summe zweier Unterräume $\mathcal{H}_+$ und $\mathcal{H}_-$ (also $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$). Finde eine Möglichkeit, eine beliebige Wellenfunktion $\psi(x) \in \mathcal{H}$ als $\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$ zu schreiben, wobei $\psi_+ \in \mathcal{H}_+$ und $\psi_- \in \mathcal{H}_-$.

(d) Angenommen wir betrachten einen Hamiltonoperator $\hat{H}$ mit $\left[\hat{H}, \hat{\Pi}\right]_- = 0$. Was lässt sich in diesem Fall über die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ sagen? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2.4 - Klausurbeispiel IV (20 KPunkte ≡ 12 Punkte)

Betrachte einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Frequenz ω.
Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch folgenden Ausdruck gegeben ($c_0 \in \mathbb{R}$),

$$|\psi(t=0)\rangle = c_0\,|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1\rangle\ ,$$

wobei $|n\rangle$ für $n \in \mathbb{N}$ der Eigenzustand zum Energieeigenwert $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ist.

(a) Bestimme c_0. Ist $\psi(t=0,x) \equiv \langle x|\psi(t=0)\rangle$ eine gerade Funktion des Orts, eine ungerade Funktion des Orts oder keins von beidem?

(b) Es gelten die Relationen,

$$\begin{aligned}\left\langle n' \middle| \hat{x} \middle| n\right\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}\right)\ ,\\ \left\langle n' \middle| \hat{p} \middle| n\right\rangle &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} - \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}\right)\ .\end{aligned}$$

Benutze diese Formeln, um den Ortserwartungswert beziehungsweise der Impulserwartungswert des Zustands $|\psi(t=0)\rangle$ zu berechnen.

(c) Berechne im Schrödingerbild $|\psi(t)\rangle$ für $t \geq 0$.

(d) Wie lautet der Energieerwartungswert von $|\psi(t)\rangle$?

Aufgabe 2.5 - Klausurbeispiel V (20 KPunkte ≡ 12 Punkte)

$\mathcal{H}$ sei ein dreidimensionaler Hilbertraum, auf dem folgender linearer Operator $\hat{A}$ durch seine Wirkung auf eine Orthonormalbasis $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ definiert ist,

$$\hat{A}\,|0\rangle = |0\rangle + i\,|2\rangle\ , \qquad \hat{A}\,|1\rangle = |1\rangle\ , \qquad \hat{A}\,|2\rangle = -i\,|0\rangle + |2\rangle\ .$$

(a) Schreibe den Operator $\hat{A}$ als Summe von dyadischen Produkten sowie in Matrixnotation bezüglich der Orthonormalbasis $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$.

(b) Ist $\hat{A}$ hermitesch? Ist $\hat{A}$ unitär?

(c) Bestimme die Eigenwerte und eine normierte Eigenbasis von $\hat{A}$.

(d) Finde eine unitäre Matrix $\hat{U}$ sowie eine Diagonalmatrix $\hat{D}$, so dass $\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger = \hat{D}$ gilt.