Übungszettel 2 - Fourier meets Heisenberg (Abgabetermin: 01.11.2017 - vor 15:00)

Aufgabe 1 - Impulsoperator und schwacher Heisenberg (20 Punkte)

Der eindimensionale Impulsoperator in Ortsdarstellung ist durch folgenden Ausdruck gegeben,

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \ .$$

Wir bezeichnen mit $\langle \Delta x \rangle_\psi = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle_\psi}$ die Wurzel der Varianz des Ortes und mit $\langle \Delta p \rangle_\psi = \sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle_\psi}$ die Wurzel der Varianz des Impulses. Sie sind gegeben durch

$$\langle \Delta x \rangle_\psi = \sqrt{\langle x^2 \rangle_\psi - \langle x \rangle_\psi^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x^2 \psi(x)\ dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x \psi(x)\ dx \right)^2} \ ,$$

$$\langle \Delta p \rangle_\psi = \sqrt{\langle p^2 \rangle_\psi - \langle p \rangle_\psi^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \hat{p}^2 \psi(x)\ dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \hat{p} \psi(x)\ dx \right)^2} \ .$$

(a) Zeige, dass für alle $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ der Erwartungswert des Impulsoperators reell ist.
Hinweis: Der Erwartungswert des Impulses ist gegeben durch $\langle p \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \hat{p}\psi(x)\ dx$. Benutze partielle Integration. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass Funktionen im $L^2(\mathbb{R})$ im Unendlichen verschwinden.

(b) Zeige, dass für alle reellwertigen $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ der Erwartungswert des Impulsoperators verschwindet.

(c) Erkläre, warum es keine Wellenfunktion im $L^2(\mathbb{R})$ gibt, deren Varianz des Orts verschwindet. Wie könnte eine "Funktion" (außerhalb des $L^2(\mathbb{R})$) aussehen, deren Varianz des Ortes verschwindet? Diskutiere die Varianz des Impulses dieser "Funktion"?
Hinweis: OBdA kann der Erwartungswert des Ortes zu null gewählt werden. Wenn wir über Wellenfunktionen sprechen, nehmen wir immer an, dass sie auf eins normiert sind.

(d) Erkläre, warum es keine Wellenfunktion im $L^2(\mathbb{R})$ gibt, deren Varianz des Impulses verschwindet. Wie könnte eine "Funktion" (außerhalb des $L^2(\mathbb{R})$) aussehen, deren Varianz des Impulses verschwindet? Diskutiere die Varianz des Ortes dieser "Funktion"?
Hinweis: OBdA kann der Erwartungswert des Impulses zu null gewählt werden. Benutze partielle Integration.

(e) Existiert eine Wellenfunktion $\psi(x)$ im $L^2(\mathbb{R})$, für die das Produkt $\langle \Delta x \rangle_\psi \langle \Delta p \rangle_\psi$ verschwindet? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2 - Eindimensionale Fouriertransformation (16 Punkte)

Für Funktionen $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ist die eindimensionale Fouriertransformation, $\mathfrak{F}$, definiert über

$$\tilde{f}(k) = \mathfrak{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\ dx \ ,$$

wobei $\tilde{f}(k) \in L^2(\mathbb{R})$. Das Inverse der Fouriertransformation, $\mathfrak{F}^{-1}$, ist gegeben durch

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\tilde{f}(k)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, e^{ikx}\ dk.$$

(a) Zeige folgende Relationen,

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] = ik\tilde{f}(k) \ , \qquad \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{d}{dk}\tilde{f}(k)\right] = -ixf(x) \ , \qquad \mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}[f(x)]\right] = f(-x) \ .$$

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\ dx = 2\pi\delta(a)$.

(b) Beweise das Faltungstheorem der Fouriertransformation,

$$\mathfrak{F}[(f \star g)(x)] \equiv \mathfrak{F}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\ d\xi\right)\right] = \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k) \ .$$

Hinweis: Das Argument der Faltung ist x, nach dieser Variable ist entsprechend die Fouriertransformation auszuführen.

(c) Zeige, dass die Fouriertransformation Skalarprodukte im $L^2(\mathbb{R})$ invariant lässt, also $\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g]\rangle_{L^2} \ .$$

Schlussfolgere daraus die sogenannte Plancherel-Gleichung,

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}): \ \|\mathfrak{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \ .$$

Hinweis: Das Skalarprodukt im $L^2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch (ein * bezeichnet komplexe Konjugation)

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x)\ dx \ .$$

Die Norm einer Funktion im $L^2(\mathbb{R})$ ist durch das Skalarprodukt induziert, also $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{L^2}}$.

(d) Zeige, dass die Fouriertransformation eine unitäre Transformation auf dem $L^2(\mathbb{R})$ ist.
Hinweis: Eine lineare (Linearität ist als Erstes zu zeigen!) Abbildung ist genau dann unitär, wenn sie Skalarprodukte invariant lässt. Streng genommen muss zusätzlich gezeigt werden, dass sie eine Surjektion ist, aber dies nehmen wir als gegeben an (der Beweis gibt Zusatzpunkte, zeige und benutze dazu die Relation $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$).

Aufgabe 3 - Fourierlimit und starker Heisenberg (24 Punkte)

Für eine beliebige komplexwertige Funktion $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, und ihre Fouriertransformierte $\tilde{f}(k) \in L^2(\mathbb{R})$, definiert man die Wurzel des zweiten Moments im Ortsraum, $X_f^{(2)}$, bzw. im Wellenvektorraum, $K_f^{(2)}$, als

$$X_f^{(2)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2\ dx} \ , \qquad K_f^{(2)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left|\tilde{f}(k)\right|^2\ dk} \ .$$

In dieser Aufgabe nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{|x|} f(x) \to 0$ sowie $\frac{d}{dx} f(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Zeige folgende Relationen,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x f^*(x) \frac{df}{dx}\ dx\right] &= -\frac{1}{2}\|f\|_{L^2} \ , \\
\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{df}{dx}\right|^2\ dx &= \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left|\tilde{f}(k)\right|^2\ dk \ .
\end{aligned}$$

(b) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf einem beliebigen Hilbertraum $\mathcal{H}$ (wie zum Beispiel dem $L^2(\mathbb{R})$) besagt, dass für zwei beliebige Elemente des Hilbertraums $a, b \in \mathcal{H}$ die Ungleichung

$$|\langle a, b\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|a\|_{\mathcal{H}} \|b\|_{\mathcal{H}}$$

gilt mit Gleichheit genau dann wenn a und b linear abhängig sind, also $\exists \lambda \in \mathbb{C}: \ a = \lambda b$.
Benutze die Cauchy-Schwarz-Ungleichung um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x f^*(x) \frac{df}{dx}\ dx\right] \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} x f^*(x) \frac{df}{dx}\ dx\right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2\ dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{df}{dx}\right|^2\ dx} \ .$$

(c) Beweise das sogenannte Fourierlimit: Für alle Funktionen $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ gilt $X_f^{(2)} K_f^{(2)} \geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}$ mit Gleichheit genau dann wenn $f(x) = Ce^{-\alpha x^2}$ für beliebiges $C \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.
Hinweis: Starte vom Ergebnis von Teilaufgabe (b) und benutze dann Teilaufgabe (a).

(d) Schlussfolgere die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort und Impuls: Für jede Wellenfunktion $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ gilt $\langle \Delta x\rangle_\psi \langle \Delta p\rangle_\psi \geq \frac{\hbar}{2}$.
Hinweis: $\langle \Delta x\rangle_\psi$ und $\langle \Delta p\rangle_\psi$ sind wie in Aufgabe 1 definiert. Zeige zunächst, dass für alle Wellenfunktionen $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ und alle $x_0, k_0 \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2\ dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (k - k_0)^2 |\tilde{\psi}(k)|^2\ dk} \geq \frac{1}{2}$. Dazu benutze das Ergebnis von Teilaufgabe (c) für die Funktion $g(x) = e^{-ik_0 x} f(x + x_0)$. Wähle schließlich passende Werte für x_0 und k_0, achte auf Normierung und benutze $p = \hbar k$.