Übungszettel 3 - Phasen in der QM und freies Teilchen (Abgabetermin: 07.11.2017)

Aufgabe 1 - Globale und Relative Phasen (25 Punkte)

(a) Es sei $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung (Hamiltonoperator $\hat{H}$) zur Eigenenergie E. Zeige, dass dann auch $e^{i\varphi}\psi(x)$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) eine Lösung der Schrödingergleichung zur selben Eigenenergie ist.

(b) Es sei $\psi(x)$ eine Wellenfunktion im $L^2(\mathbb{R})$. Wir definieren die Wellenfunktionen $\chi_\varphi(x) = e^{i\varphi}\psi(x)$ für $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für beliebige Observablen $\hat{A}$ folgende Relation gilt,

$$\forall\varphi \in \mathbb{R}: \ \left\langle \hat{A} \right\rangle_{\chi_\varphi} = \left\langle \hat{A} \right\rangle_{\psi} \ .$$

Man nennt φ auch die "globale Phase" der Wellenfunktion. Begründe, warum es kein Experiment geben kann, das die globale Phase einer Wellenfunktion bestimmt.

(c) Es seien $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ zwei Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit einem Hamiltonoperator $\hat{H}$ zu den Eigenenergien E_1 (für $\psi_1(x)$) bzw. E_2 (für $\psi_2(x)$). Diskutiere, in welchen Fällen die Wellenfunktion $\psi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\varphi_1}\psi_1(x) + e^{i\varphi_2}\psi_2(x)\right]$ ($\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$) eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung ist. Bestimme die zugehörige Eigenenergie.

(d) In dieser und allen folgenden Teilaufgaben sind alle Objekte wie in Teilaufgabe (c) definiert. Außerdem nehmen wir im Folgenden $E_1 \neq E_2$ an. Zeige, dass es keine Möglichkeit gibt die sogenannte relative Phase $\Delta\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ des Zustands $\psi_s(x)$ zu bestimmen, indem man nur Energiemessungen durchführt.
Hinweis: Eigenfunktionen des Hamiltonoperators zu unterschiedlichen Energieeigenwerten sind orthogonal.

(e) Wir definieren einen linearen Operator $\hat{\Phi}$ durch seine Operation auf eine beliebige Wellenfunktion $\psi(x)$ im $L^2(\mathbb{R})$ folgendermaßen

$$\hat{\Phi}\psi_1(x) = \psi_2(x), \quad \hat{\Phi}\psi_2(x) = \psi_1(x), \quad \hat{\Phi}\psi(x) = 0 \ \forall\psi(x) \notin \mathrm{span}\left\{\psi_1(x), \psi_2(x)\right\} \ .$$

Zeige, dass $\hat{\Phi}$ eine Observable ist. Zeige dann, dass eine Messung von $\hat{\Phi}$ Information über die relative Phase von $\psi_s(x)$ offenbart, aber sie noch nicht eindeutig bestimmt.
Hinweis: Um zu zeigen, dass $\hat{\Phi}$ eine Observable ist, beweise, dass ihr Erwartungswert für beliebige Wellenfunktionen reell ist. Überlege dir, welcher Wertebereich von $\Delta\varphi$ die relative Phase des Superpositionszustands $\psi_s(x)$ eindeutig bestimmt.

(f) Finde eine weitere Observable $\hat{\Xi}$, deren gemeinsame Messung mit $\hat{\Phi}$ die relative Phase des Zustands $\psi_s(x)$ eindeutig bestimmt.
Hinweis: Zeige explizit, dass deine Konstruktion von $\hat{\Xi}$ auch tatsächlich eine Observable ist. $\hat{\Xi}$ kann fast identisch zu $\hat{\Phi}$ gewählt werden. Der springende Punkt ist das "fast".

(g) Es sei $\psi(x) = \lambda\psi_1(x) + \mu\psi_2(x)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gegeben. Zeige, dass die Messung der Observablen $\hat{H}$, $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Xi}$ die Werte von λ und μ eindeutig bestimmt.
Hinweis: Aus der Normierungsbedingung und der Unbestimmbarkeit der globalen Phase ergeben sich bereits Bedingungen an λ und μ. Diese darf man nicht vergessen!

Aufgabe 2 - Zweidimensionale Fouriertransformation (10 Punkte)

Die zweidimensionale Fouriertransformation $\tilde{\psi}(k,\omega) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ einer komplexwertigen Funktion $\psi(x,t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ einer Ortskoordinate $x \in \mathbb{R}$ und einer Zeitkoordinate $t \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\tilde{\psi}(k,\omega) = \mathfrak{F}\left[\psi(x,t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\int e^{-i(kx-\omega t)}\psi(x,t) \ dxdt \ .$$

Die Rücktransformation $\mathfrak{F}^{-1}\left[\tilde{\psi}(k,\omega)\right]$ ist gegeben durch

$$\psi(x,t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\tilde{\psi}(k,\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\int e^{i(kx-\omega t)}\tilde{\psi}(k,\omega) \ dkd\omega \ .$$

(a) Es sei $\psi_0(x,t) = \phi(x)\, e^{i\omega_0 t}$ wobei $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ und $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Bestimme $\tilde{\psi}_0(k,\omega)$.
Hinweis: Nenne die eindimensionale Fouriertransformierte von $\phi(x)$ einfach $\tilde{\phi}(k)$, diese kann als allgemeiner Ausdruck im Ergebnis stehengelassen werden.

(b) Zeige, dass für jede Funktion $\psi(x,t) \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ die Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\right] &= -k^2\tilde{\psi}(k,\omega) \;, \\ \mathfrak{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right] &= -i\omega\cdot\tilde{\psi}(k,\omega) \end{aligned}$$

gelten.

(c) Zeige, dass die eindimensionale Schrödingergleichung im Fourierraum für ein Teilchen der Masse m in einem Potential $V(x)$ sich zu folgendem Ausdruck ergibt,

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi(k,\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{V}(k-\kappa)\,\psi(\kappa,\omega)\;d\kappa = \omega\psi(k,\omega) \;. \tag{1}$$

Hinweis: Faltung!

Aufgabe 3 - Freies Teilchen (25 Punkte)

(a) Berechne die Dispersion $\omega(k)$ der Lösungen der eindimensionalen, zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein freies Teilchen der Masse m sowie die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit der zugehörigen Wellenpakete.
Hinweis: Die fouriertransformierte Schrödingergleichung des freien Teilchens (also $V(x) = 0$, was gilt dann für $\tilde{V}(k)$?) kann direkt aus Gleichung (1) abgelesen werden.

(b) Betrachte für beliebiges $k_0 \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ ein Gaußsches Wellenpaket im Impulsraum als Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung,

$$\tilde{\psi}_G(k) = e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha^2}} \;.$$

Berechne, unter Berücksichtigung der oben hergeleiteten Dispersionrelation, die explizite Orts-Zeit Darstellung des Gaußschen Wellenpakets, $\psi_G(x,t)$, mit Hilfe der Fouriertransformation. Normiere das Resultat.
Hinweis: Die Dispersionrelation ist der Ausdruck $\omega(k)$. Versuche das Impulsraumintegral auf die Form $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ak^2+2ABk+C}\,dk$ zu bekommen. Benutze quadratische Ergänzung. Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass für das verallgemeinerte Integral der Gaußfuntion für alle $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(a) > 0$ folgendes gilt $\int e^{-\frac{(x+b)^2}{a^2}}\,dx = \sqrt{\pi}a$. Das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeitsdichte lautet

$$|\psi_G(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\alpha m}{\sqrt{m^2+\hbar^4 t^2\alpha^4}}\exp\left(-\frac{\alpha^2 m^2}{[m^2+\hbar^4 t^2\alpha^4]}\left[\left(x-\frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2\right]\right) \;. \tag{2}$$

(c) Berechne den zeitabhängigen Erwartungswert des Ortes, $\langle x\rangle_{\psi_G(t)}$, die zeitabhängige Varianz des Ortes, $\langle\Delta x\rangle^2_{\psi_G(t)}$, sowie das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Wellenpakets im Ortsraum, $x_{\max}(t)$. Interpretiere das Resultat.
Hinweis: Es ist leichter die Resultate für eine allgemeine, normierte Gaußfunktion,

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \;,$$

zu berechnen (Übungszettel 1!) und dann die Ergebnisse für das Gaußsche Wellenpaket daraus abzuleiten. Mit anderen Worten, rechne nicht mit dem länglichen Ausdruck aus Gleichung (2) sondern führe sinnvolle Abkürzungen ein!

(d) Berechne das zeitabhängige Produkt aus Ortsunschärfe $\Delta x(t)$ von $|\Psi(x,t)|^2$ und Impulsunschärfe Δp von $\left|\tilde{\Psi}(p)\right|^2$ und vergleiche mit der Heisenbergschen Unschärferelation für $t \geq 0$.