Übungszettel 5 - Quantenmechanik von α bis ω (Abgabetermin: 21.11.2017)

Aufgabe 1 - Radioaktiver α-Zerfall (32 Punkte)

In dieser Aufgabe behandeln wir ein α-Teilchen, das durch die starke Wechselwirkung in einem Atomkern mit Ladung Ze (e ist die Elementarladung) gefangen ist. Ein Alphateilchen ist ein ${}^4_2\mathrm{He}$ Atomkern, es trägt also die Ladung $2e$. In sehr grober Näherung nehmen wir an, dass die starke Wechselwirkung für die Nukleonen auf einen bestimmten Abstand r_1 zwischen α-Teilchen und Atomkern eingeschränkt ist, dort attraktiv mit Stärke V_0 wirkt und für größere Distanzen vernachlässigt werden kann. Für Abstände größer als r_1 wirkt das repulsive Coulombpotential, das wir wiederum für Distanzen kleiner r_1 vernachlässigen. All dies ergibt insgesamt folgendes eindimensionales Potential in Abhängigkeit des Abstands r von α-Teilchen und Atomkern,

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < 0 \\ -V_0, & r \in [0, r_1] \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r}, & r > r_1 \end{cases} .$$

(a) Skizziere das Potential.

(b) Für welche Energien E kann ein α-Teilchen ins Unendliche tunneln? Bestimme den entsprechenden Austrittspunkt r_2 aus der Coulombbarriere.
Hinweis: Es gibt auch eine obere Schranke für die Energie, ab der es keinen Sinn mehr macht von "Tunneln" zu sprechen. Vergiss nicht, diese auch zu bestimmen!

(c) Leite folgenden, genäherten Ausdruck für die Tunnelwahrscheinlichkeit des α-Teilchens her,

$$T \simeq e^{-2\gamma}, \qquad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r} - E\right)}\, dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1}\, dr\,, \tag{1}$$

wobei m die Masse des Alphateilchens ist.
Hinweis: Benutze das Ergebnis von Aufgabe 3b vom vierten Zettel.

(d) Löse das Integral aus Gleichung (1) in der durch die sehr kurze Reichweite der starken Wechselwirkung typischerweise erfüllten Näherung $r_1 \ll r_2$.
Hinweis: Substituiere $r \equiv r_2 \sin^2 u$, um das Integral zu lösen. Es gilt $\int_a^b \cos^2 u\, du = \left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin u \cos u\right]_{u=a}^{u=b}$ sowie $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Dann verwende die Näherung $\frac{r_1}{r_2} \ll 1$, um folgendes Ergebnis zu erhalten, $\gamma = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Zr_1}$ mit $K_1 = 1.980\sqrt{\mathrm{MeV}}$ und $K_2 = 1.485 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{fm}}}$.

(e) Um die Lebensdauer eines α-Strahlers abzuschätzen, kann man annehmen, dass der Kern mit einer Geschwindigkeit v im Kernpotential der starken Wechselwirkung hin- und heroszilliert und damit eine Stoßfrequenz gegen die "Wand" von $\frac{v}{2r_1}$ besitzt. Begründe, warum sich damit die Lebensdauer des zerfallenden Kerns zu folgendem Ausdruck abschätzen lässt,

$$\tau \simeq \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma} .$$

In der Tabelle rechts sind die Halbwertszeiten $\tau_{1/2}$ einiger α-zerfallenden Isotope des Urans angegeben. Schätze daraus die Halbwertszeit des Uran-Isotops 238 mit Energie des α-Teilchens $E = 4.267$ MeV ab.
Hinweis: In guter Näherung sind r_1 und v isotopenunabhängig.

	E (MeV)	$\tau_{1/2}$ (Jahre)
${}^{230}_{92}\mathrm{U}$	5.992	$5.70 \cdot 10^{-2}$
${}^{232}_{92}\mathrm{U}$	5.413	$6.89 \cdot 10^{1}$
${}^{234}_{92}\mathrm{U}$	4.856	$2.46 \cdot 10^{5}$
${}^{236}_{92}\mathrm{U}$	4.572	$2.35 \cdot 10^{7}$

Aufgabe 2 - Ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2([0, 2\pi])$ (12 Punkte)

Wir betrachten in dieser Teilaufgabe den Raum $L^2([0, 2\pi])$, also die quadratintegrablen Funktionen im Intervall $[0, 2\pi]$. Die Definition des Skalarprodukts in diesem Funktionenraum ist gegeben durch

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x)\, g(x)\; dx .$$

(a) Zeige, dass die Menge von Funktionen $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ein orthonormales System im $L^2\left([0, 2\pi]\right)$ bildet.

(b) Zeige, dass die Funktionenmenge A vollständig ist, also sei $z_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, dann gilt $\forall x, x' \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n^*(x)\, z_n(x') = \delta(x - x') \ . \tag{2}$$

Hinweis: Es ist kein mathematisch strenger Beweis nötig. Diskutiere zunächst, warum man für $x = x'$ unendlich erhält. Das reicht uns hier für diesen Fall. Dann benutze für $x \neq x'$ folgende Relation,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n + \sum_{n=-\infty}^{0} q^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\,,$$

sowie die Summenformel der geometrischen Reihe, die zumindest im borelsummierbaren Sinn sogar für $\mathrm{Re}(q) < 1$ *gilt. Warum gilt die Bedingung für den Realteil von q hier für beide geometrische Reihen?*

(c) Zeige explizit durch Einsetzen der Vollständigkeitsrelation aus Gleichung (2), dass damit in der Tat für jede Funktion $f \in L^2\left([0, 2\pi]\right)$ folgendes gilt,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z_n(x) \ ,$$

mit $c_n = \langle z_n, f\rangle$.

Aufgabe 3 - Zeitentwicklung im harmonischen Oszillator I (16 Punkte)

Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Frequenz ω. Wir bezeichnen mit $\varphi_n(x)$ die n-te Eigenfunktion, die zugehörige Eigenenergie ist $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Da die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators vollständig sind, kann man jede Wellenfunktion $\psi(x)$ im $L^2(\mathbb{R})$ durch sie aufspannen, ganz ähnlich wie in Aufgabe 2c diskutiert. Wie schon in der Vorlesung besprochen ist das ganz analog zur Situation in endlichdimensionalen Vektorräumen, in denen Vektoren (z.B. im $\mathbb{R}^3$) auf bestimmte Komponenten (z.B. die Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung) projiziert werden und man somit beliebige Vektoren immer in diesen Komponenten ausdrücken kann. In Formeln heißt das, dass jede Wellenfunktion geschrieben werden kann als

$$\psi(x) = \sum_n \alpha_n \varphi_n(x) \ . \tag{3}$$

Zeige durch das Bilden des Skalarprodukts von Gleichung (3) mit den Funktionen $\varphi_n(x)$, dass

$$\alpha_n = \langle \varphi_n, \psi\rangle \ .$$

(b) Es sei $\psi(x, 0) \equiv \psi(x)$ eine Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Koeffizienten $\alpha_n(0) \equiv \alpha_n$. Zeige, dass folgende Relation für beliebige Zeiten $t \geq 0$ gilt,

$$\psi(x, t) = \sum_n \alpha_n(t)\, \varphi_n(x) \ , \tag{4}$$

mit $\alpha_n(t) = e^{-i\omega n t}\alpha_n(0)$.
Hinweis: Es könnte sein, dass du ein leicht anderes Ergebnis erhältst. Vergiss jedoch nicht, dass zwei Wellenfunktionen gleich sind, wenn sie sich nur durch eine globale Phase unterscheiden.

(c) Wann ist eine Wellenfunktion nach Gleichung (4) stationär, also $\forall x, t:\ |\psi(x, t)|^2 = |\psi(x, 0)|^2$?
Hinweis: Mit anderen Worten, wann gilt $\forall x, t:\ \psi(x, t) = \psi(x, 0)$ modulo einer globalen Phase?

(d) Betrachte eine gleichförmige Überlagerung aus N Eigenzuständen $\{\varphi_{n_i}(x)\}_{i=1,\dots,N}$ mit jeweils unterschiedlichen Eigenenergien zum Zeitpunkt $t = 0$, also

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\varphi_{n_1}(x) + \varphi_{n_2}(x) + \cdots + \varphi_{n_N}(x)\right].$$

Zu welchen Zeiten $t > 0$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte dieses Wellenpakets wieder identisch mit seinem Ausgangszustand? Dieses Phänomen nennt man auch "revival". Wie lautet der spätestmögliche Zeitpunkt für das erste "revival" im harmonischen Oszillator?
Hinweis: Es hilft hier eventuell, sich dies zunächst für einen Spezialfall anzuschauen, z.B. eine Überlagerung von $N = 3$ Zuständen mit $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ und $n_3 = 5$.