Übungszettel 6 - Isn't it harmonic? (Abgabe: Vorlesung 28.11.2017 *oder* 29.11.2017 bis 11:15 im Fach)

Aufgabe 1 - Zeitentwicklung im harmonischen Oszillator II (26 Punkte)

Betrachte ein Teilchen der Masse m in einem harmonischen Oszillator der Frequenz ω mit dem dazugehörigen Hamiltonoperator $\hat{H}$ und Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$,

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \qquad \varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),$$

wobei

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

das n-te Hermite-Polynom ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll das Teilchen durch ein Gaußsches Wellenpaket ($x_0 \in \mathbb{R}$),

$$\psi(x,0) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2},$$

beschrieben werden. Wir benutzen in dieser Aufgabe die Abkürzungen $\bar{x} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $x' \equiv \frac{x}{\bar{x}}$, $x_0' \equiv \frac{x_0}{\bar{x}}$.

(a) Zeige, dass dieses Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Form

$$\psi(x,0) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$$

mit folgenden Koeffizienten c_n,

$$c_n = \frac{\left(x_0'\right)^n e^{-\frac{\left(x_0'\right)^2}{4}}}{\sqrt{2^n n!}}, \tag{1}$$

geschrieben werden kann.
Hinweis: Erinnere dich an Aufgabe 3a vom letzten Zettel! Beweise (durch n-malige partielle Integration bzw. Induktion) und benutze die Relation ($\tilde{x} \in \mathbb{R}$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\tilde{x})^2} H_n(x) = \sqrt{\pi}\,(2\tilde{x})^n .$$

(b) Zeige, dass das Wellenpaket zum Zeitpunkt t durch folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{(B(x,t) - iA(x,t))},$$

wobei

$$\begin{aligned} A(x,t) &= x' x_0' \sin(\omega t) - \frac{\left(x_0'\right)^2}{4}\sin(2\omega t), \\ B(x,t) &= -\frac{1}{2}\left(x' - x_0'\cos(\omega t)\right)^2 . \end{aligned}$$

Hinweis: Starte vom Ergebnis von Aufgabe 3b vom letzten Zettel. Dann benutze (ohne Beweis) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-i\omega n t} H_n\left(x'\right) \frac{1}{2^n n!}\left(x_0'\right)^n &= \exp\left[-e^{-2i\omega t}\frac{\left(x_0'\right)^2}{4} + x' x_0' e^{-i\omega t}\right], \\ \cos(2\omega t) &= \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) . \end{aligned}$$

(c) Berechne die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle x(t)\rangle$ sowie $\langle \Delta x(t)\rangle$ im Zustand $\psi(x,t)$ und zeige somit, dass das gegebene Gaußsche Wellenpaket in einem harmonischen Oszillator (im Gegensatz zum Fall des freien Teilchens, siehe Übungszettel 3, Aufgabe 3) nicht zerfließt, also eine zeitunabhängige räumliche Breite hat.

Aufgabe 2 - Kohärente Zustände (22 Punkte)

Die Eigenfunktionen des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ beim harmonischen Oszillator (Frequenz ω) werden kohärente Zustände genannt. Für die Entdeckung der kohärenten Zustände hat Roy Glauber im Jahr 2005 den Nobelpreis für Physik bekommen, da sie ein entscheidendes Fundament der Quantenoptik darstellen. Die Eigenwerte der kohärenten Zustände füllen die gesamte komplexe Ebene, also $\forall\alpha \in \mathbb{C}$ existiert ein Eigenzustand $\psi_\alpha(x)$ mit

$$\hat{a}\psi_\alpha(x) = \alpha\psi_\alpha(x)\ .$$

(a) Warum ist das Spektrum des Vernichtungsoperators (im Gegensatz zum Beispiel zum Spektrum des Hamiltonoperators) nicht nur auf die reellen Zahlen beschränkt?

(b) Wir entwickeln den kohärenten Zustand $\psi_\alpha(x)$ in die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators,

$$\psi_\alpha(x) = \sum_n c_n\psi_n(x)\ . \tag{2}$$

Zeige, dass sich die Koeffizienten zu folgendem Ausdruck ergeben,

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0\,. \tag{3}$$

Bestimme c_0, indem du $\psi_\alpha(x)$ normierst.
Hinweis: Wende $\hat{a}$ auf Gleichung (2) an, um eine rekursive Relation zu erhalten. Zur Bestimmung von c_0 könnte es nützlich sein die Reihenentwicklung von $e^{|\alpha|^2}$ hinzuschreiben.

(c) Zeige, dass ein kohärenter Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Eigenwert $\alpha \equiv \alpha(0)$ auch zu jedem späteren Zeitpunkt ein kohärenter Zustand bleibt, jedoch mit zeitabhängigem Eigenwert $\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha(0)$.

(d) Zeige, dass das Gaußsche Wellenpaket aus Aufgabe 1 ein kohärenter Zustand ist. Wie lautet der Eigenwert?
Hinweis: Benutze die Koeffizienten des Gaußschen Wellenpakets in der Energieeigenbasis aus Gleichung (1) und vergleiche mit Gleichung (3).

(e) Welche Eigenzustände des harmonischen Oszillators sind gleichzeitig kohärente Zustände?
Hinweis: In Gleichung (3) für $\alpha = 0$ mit $0^0 = 1$ zu argumentieren lasse ich euch hier nicht durchgehen! Ihr müsst einen anderen Weg finden!

Aufgabe 3 - Getriebener Harmonischer Oszillator I (12 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wie einen getriebenen quantenmechanischen harmonischen Oszillator der Frequenz ω mit einer konstanten, externen Kraft F_0. Dieser wird, in Analogie zum klassischen Fall, durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben,

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - F_0\hat{x}\,. \tag{4}$$

(a) Zeige, dass sich der Hamiltonoperator aus Gleichung (4) folgendermaßen schreiben lässt,

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - x_0F_0\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)\ , \tag{5}$$

wobei $x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ und m die Teilchenmasse ist.

(b) Wir definieren den Operator $\hat{b} = \hat{a} - \zeta\mathbb{1}$ und analog $\hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger - \zeta^*\mathbb{1}$ wobei $\mathbb{1}$ den Identitätsoperator repräsentiert. Zeige, dass $\forall\zeta \in \mathbb{C} : \left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = \mathbb{1}$.

(c) Zeige, dass sich Gleichung (5) durch geschickte Wahl von ζ in der Definition von $\hat{b}$ umschreiben lässt zu

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right) - \frac{x_0^2F_0^2}{\hbar\omega}\mathbb{1}\,. \tag{6}$$

Bestimme das Spektrum des getriebenen harmonischen Oszillators. Interpretiere dein Resultat. Begründe insbesondere, warum die Grundzustandsenergie im Vergleich zum ungetriebenen Oszillator niedriger liegt.
Hinweis: Wegen $\left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = \mathbb{1}$ können wir analog zur Vorlesung schlussfolgern, dass der Operator $\hat{n}_b \equiv \hat{b}^\dagger\hat{b}$ das Spektrum $\mathbb{N}_0$ besitzt. Man braucht dazu noch streng genommen dass $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ nichtnegativ ist sowie die Existenz des Grundzustandes mit Eigenwert 0 von $\hat{n}_b$, aber darum kümmern wir uns auf dem nächsten Zettel. In dieser Aufgabe darf dies schon einmal angenommen werden.