Übungszettel 7 - All The Way To Zeno
(Abgabe: Vorlesung 05.12.2017 *oder* 06.12.2017 bis 11:15 im Fach)

Aufgabe 1 - Der Darstellungssatz von Fréchet-Riesz (0 Punkte + 10 Zusatzpunkte)

Quantenmechanische Zustände werden mit Elementen eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ identifiziert und durch sogenannte Kets, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, symbolisiert. Der Dualraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$ wird mit $\mathcal{H}'$ bezeichnet, er besteht aus der Menge der Funktionale auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, also lineare Abbildungen in die komplexen Zahlen, $f : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$. In dieser Aufgabe betrachten wir ein beliebiges $f \in \mathcal{H}^{'}$, welches nicht das Nullfunktional ist.

(a) Man kann zeigen (Homomorphiesatz für Vektorräume), dass f eine bijektive Abbildung zwischen dem Unterraum von $\mathcal{H}$, welcher nicht auf null abgebildet wird, und dem Bildraum $\mathbb{C}$ ist. Dieser Unterraum ist das orthogonale Komplement des Kerns $\ker(f)$, wir nennen ihn $\ker^{\perp}(f)$. Zeige, dass $\ker^{\perp}(f)$ ein eindimensionaler Vektorraum ist, mit anderen Worten, jedes Element von $\ker^{\perp}(f)$ lässt sich schreiben als $\lambda\,|\bar{\psi}_{\ker^{\perp}}\rangle$ für ein normiertes $|\bar{\psi}_{\ker^{\perp}}\rangle \in \mathcal{H}$.

(b) Wir schauen uns nun den normierten Vektor $|\bar{\psi}_{\ker^{\perp}}\rangle \in \ker^{\perp}(f)$ genauer an. Da er nicht im Kern liegt, existiert ein $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ mit $f\left(|\bar{\psi}_{\ker^{\perp}}\rangle\right) = c$. Bestimme einen Vektor $|\phi_f\rangle \in \ker^{\perp}(f)$, sodass $\langle \phi_f|\bar{\psi}_{\ker^{\perp}}\rangle = c$.

(c) Man kann zeigen (Satz von der Orthogonalprojektion), dass jedes $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ geschrieben werden kann als

$$|\psi\rangle = |\psi_{\ker}\rangle + |\psi_{\ker^{\perp}}\rangle\ ,$$

wobei $|\psi_{\ker}\rangle \in \ker(f)$ und $|\psi_{\ker^{\perp}}\rangle \in \ker^{\perp}(f)$. Zeige, dass für alle $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ gilt, dass

$$f\left(|\psi\rangle\right) = \langle \phi_f\,|\,\psi\rangle\ , \tag{1}$$

wobei $|\phi_f\rangle$ in Teilaufgabe (b) definiert wurde.

(d) Zeige, dass $|\phi_f\rangle$ in Gleichung (1) eindeutig bestimmt ist. Damit ist jedes Element von $\mathcal{H}^{'}$ eindeutig mit einem Element des originalen Hilbertraums $\mathcal{H}$ identifizierbar.

Aufgabe 2 - Der Dualraum (24 Punkte)

In Aufgabe 1 haben wir gezeigt, dass für alle $f \in \mathcal{H}^{'}$ genau ein $|\phi_f\rangle \in \mathcal{H}$ existiert, so dass Gleichung (1) für alle $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ erfüllt ist. Dieses fundamentale Resultat ist als *Darstellungssatz von Fréchet-Riesz* bekannt und erlaubt uns, an Stelle von Funktionalen im Dualraum mit Vektoren des ursprünglichen Hilbertraums zu arbeiten. Um die Funktionale im Dualraum von den Vektoren des Hilbertraums zu unterscheiden, notieren wir sie als sogenannte Bras $\langle \phi_f| \in \mathcal{H}^{'}$ (der Kürze halber lassen wir das Subskript f im Folgenden weg).

(a) Zeige, dass $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle \phi| \in \mathcal{H}^{'} :\ \langle \lambda\phi| = \lambda^{*}\langle \phi|$.
Hinweis: Wende die zu zeigende Gleichung auf einen beliebigen Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ an.

(b) Es sei $\hat{A}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$. Zeige, dass $\forall \langle \phi| \in \mathcal{H}^{'} :\ \langle \hat{A}\phi| = \langle \phi|\,\hat{A}^{\dagger}$.
Hinweis: Für den adjungierten Operator $\hat{A}^{\dagger}$ gilt $\forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H} :\ \langle \phi|\hat{A}^{\dagger}|\psi\rangle = \langle \psi|\hat{A}|\phi\rangle^{*}$.

(c) Zeige, dass für alle $|\nu\rangle, |\xi\rangle \in \mathcal{H}$ der Ausdruck $|\xi\rangle\langle \nu|$ einen linearen Operator definiert, dessen Bildraum eindimensional ist.
Hinweis: Dieses sogenannte dyadische Produkt ist zu verstehen als "Wende $\langle \phi|$ an (das ergibt einen Skalar) und multipliziere das Resultat mit $|\xi\rangle$ (dies ergibt wieder einen Vektor des Hilbertraums)."

(d) Zeige, dass der adjungierte Operator zum dyadischen Produkt $|\xi\rangle\langle \nu|$ der Operator $|\nu\rangle\langle \xi|$ ist.
Hinweis: Verwende den Hinweis zu Teilaufgabe (b) erneut.

(e) Zeige, dass das dyadische Produkt eines normierten Hilbertraumvektors mit sich selbst einen eindimensionalen Projektor ergibt.
Hinweis: Ein Projektor ist ein linearer Operator $\hat{P}$ mit der Eigenschaft $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

(f) Wiederhole die Teilaufgaben (a) bis (e) für das Beispiel $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ und zeige alle Relationen explizit, indem du Kets mit Spaltenvektoren $|a\rangle \equiv \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, Bras mit adjungierten Zeilenvektoren $\langle a| \equiv \vec{a}^{\dagger} = \begin{pmatrix} x^{*} & y^{*} \end{pmatrix}$ und Operatoren mit 2×2 Matrizen identifizierst.
Hinweis: Zeile mal Spalte von links nach rechts in jeder Multiplikation von Vektoren bzw. Matrizen! Daraus folgt zum Beispiel auch, dass das dyadische Produkt aus einem Spaltenvektor und einem Zeilenvektor in der Tat eine Matrix ist! **Diese Teilaufgabe gibt 12 Punkte!**

Aufgabe 3 - Getriebener Harmonischer Oszillator II (16 Punkte)

In der dritten Aufgabe vom letzten Zettel haben wir folgende Form des Hamiltonoperators eines getriebenen harmonischen Oszillators der Frequenz ω unter konstanter Kraft F_0 bestimmt,

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right) - \frac{x_0^2 F_0^2}{\hbar\omega}\mathbb{1}\,,$$

wobei $x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ und $\hat{b} = \hat{a} - \frac{x_0 F_0}{\hbar\omega}\mathbb{1}$.

(a) Zeige, dass $\forall\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}:\ \langle\psi|\hat{b}^\dagger\hat{b}|\psi\rangle \geq 0$.
Hinweis: Diese Aufgabe ist in einer einzigen kurzen Zeile lösbar. Überprüfe, ob dir vielleicht ein Resultat aus Aufgabe 2 dabei hilft.

(b) Zeige, dass der Grundzustand des getriebenen harmonischen Oszillators, $|\varphi_0\rangle$, durch $\hat{b}\,|\varphi_0\rangle = 0$ gegeben ist. Zeige außerdem, dass er einem kohärenter Zustand des ungetriebenen harmonischen Oszillators entspricht.
Hinweis: Die Existenz dieses Zustands zeigt sich sofort durch Identifikation mit einem kohärenten Zustand. Um zu argumentieren, dass dies in der Tat der Grundzustand ist, zeige, dass $\forall\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}:\ \left\langle \hat{H}\right\rangle_{|\psi\rangle} \geq \left\langle \hat{H}\right\rangle_{|\varphi_0\rangle}$.

(c) Bestimme den Ortserwartungswert für den Grundzustands des getriebenen harmonischen Oszillators und interpretiere dein Resultat.

Aufgabe 4 - Zenoeffekt (20 Punkte)

Wir betrachten einen ungetriebenen harmonischen Oszillator im Grundzustand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ schalten wir eine konstante externe Kraft ein und messen von diesem Zeitpunkt an in Abständen Δt die Besetzungszahl des Oszillators in Bezug auf die Eigenzustände des ungetriebenen harmonischen Oszillators. Jede Messung führt mit einer Wahrscheinlichkeit $p_n\left[\psi\left(t\right)\right] = \left|\langle n|\psi\left(t\right)\rangle\right|^2$ zu einem instantanen Kollaps der momentanen Wellenfunktion $|\psi\left(t\right)\rangle$ auf den Zustand $|n\rangle$ wobei $|n\rangle$ die n-te Eigenfunktion des Operators $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ ist.

(a) Zeige, dass $\forall\,|\psi\left(t\right)\rangle \in \mathcal{H}:\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n\left[\psi\left(t\right)\right] = 1$. Warum ist das physikalisch sinnvoll?
Hinweis: Benutze, dass $\left\{|n\rangle\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem von* $\mathcal{H}$ *ist.*

(b) Zeige, dass für kleine Zeiten $\tau \geq 0$ folgendes gilt

$$p_0\left[\psi\left(\tau\right)\right] \simeq 1 - \eta^2\tau^2\,,$$

wobei $\eta \equiv \frac{1}{\hbar}\sqrt{\left\langle \hat{H}^2\right\rangle_{|0\rangle} - \left\langle \hat{H}\right\rangle_{|0\rangle}^2}$ proportional zur Varianz der Energie im Ausgangszustand $|\psi\left(0\right)\rangle \equiv |0\rangle$ ist.
Hinweis: $|\psi\left(\tau\right)\rangle = \hat{U}\left(\tau\right)|\psi\left(0\right)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}\,|\psi\left(0\right)\rangle \simeq \left[\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{H}^2\tau^2\right]|\psi\left(0\right)\rangle$ *für kleines* τ.

(c) Wir führen nun N Messungen in regelmäßigen, kleinen Zeitintervallen Δt durch. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt $T = N\Delta t$ ($N \in \mathbb{N}$) in *jeder einzelnen* Messung der getriebene harmonische Oszillator im Zustand $|n = 0\rangle$ gemessen wurde, gegeben ist durch

$$P_0 = \left[1 - \eta^2\left(\Delta t\right)^2\right]^N = \left[1 - \eta^2\frac{\Delta t}{N}T\right]^N\,. \tag{2}$$

(d) Zeige, dass sich für $N \to \infty$ Gleichung (2) folgendermaßen umschreiben lässt,

$$P_0 \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\eta^2\Delta t T} \longrightarrow 1\,.$$

Mit anderen Worten: Die Zeitentwicklung eines quantenmechanisches System, welches Messungen in sehr schneller Abfolge unterworfen wird, friert ein. Das System verharrt in seinem ursprünglichen Zustand. Dies wird *Zenoeffekt* genannt - der Kollaps der Wellenfunktion ist hierbei schneller als die Evolution in irgendeinen anderen Zustand!
*Bemerkung: Falls euch das wie irrsinniger Hokuspokus erscheint - dieser Effekt wurde kürzlich experimentell tatsächlich nachgewiesen und zwar unter anderem in der Gruppe vom Nobelpreisträger Serge Haroche, siehe Signoles et al., Nature Physics **10**, 715–719 (2014).*