Übungszettel 8 - Smooth Operator (Abgabe: Vorlesung 12.12.2017 *oder* 13.12.2017 bis 11:15 im Fach)

Aufgabe 1 - Kommutatoren (16 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir drei allgemeine lineare Opeartoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$.

(a) Zeige, dass der Kommutator bilinear ist, also $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}, \lambda\hat{B}\right]_- &= \left[\lambda\hat{A}, \hat{B}\right]_- = \lambda\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_- , \\ \left[\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}\right]_- &= \left[\hat{A}, \hat{B}\right]_- + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]_- , \\ \left[\hat{A}+\hat{B}, \hat{C}\right]_- &= \left[\hat{A}, \hat{C}\right]_- + \left[\hat{B}, \hat{C}\right]_- . \end{aligned}$$

(b) Beweise die Relationen $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right]_- = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]_- \hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right]_-$ sowie $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right]_- = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right]_- + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]_- \hat{B}$.

(c) Beweise die Relationen $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right]_- = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]_+ \hat{C} - \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right]_+$ sowie $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right]_- = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right]_+ - \left[\hat{A}, \hat{C}\right]_+ \hat{B}$.
Hinweis: Der so genannte Antikommutator $[\cdot,\cdot]_+$ *ist definiert über* $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

(d) Beweise die so genannte Jacobi-Identität,

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{C}\right]_-\right]_- + \left[\hat{B}, \left[\hat{C}, \hat{A}\right]_-\right]_- + \left[\hat{C}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]_-\right]_- = 0 .$$

(e) Zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass die Vertauschbarkeit von Operatoren *nicht* transitiv ist, also aus $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_- = 0$ und $\left[\hat{B}, \hat{C}\right]_- = 0$ folgt im Allgemeinen *nicht* unbedingt $\left[\hat{A}, \hat{C}\right]_- = 0$.

(f) Zeige analog zu Teilaufgabe (*e*), dass auch die Nicht-Vertauschbarkeit von Operatoren *nicht* transitiv ist, also aus $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_- \neq 0$ und $\left[\hat{B}, \hat{C}\right]_- \neq 0$ folgt im Allgemeinen *nicht* unbedingt $\left[\hat{A}, \hat{C}\right]_- \neq 0$.

Aufgabe 2 - Operatoren (24 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen beliebigen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einen beliebigen unitären Operator $\hat{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sowie einen beliebigen hermiteschen Operator $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Ein unitärer Operator erfüllt $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$. Ein hermitescher Operator erfüllt $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

(a) Zeige, dass alle Eigenwerte von $\hat{A}$ reell sind.

(b) Zeige, dass $\hat{U}$ Skalarprodukte erhält, also $\forall \left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle \psi \mid \phi \rangle = \left\langle \hat{U}\Psi \,\middle|\, \hat{U}\phi \right\rangle .$$

(c) Zeige, dass $\hat{U}$ isometrisch (normerhaltend) ist sowie dass alle Eigenwerte von $\hat{U}$ auf dem komplexen Einheitskreis liegen.

(d) Beweise, dass mit $\hat{A}$ auch $\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger$ hermitesch ist.

(e) Es seien $\hat{B}, \hat{C} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beliebige lineare Operatoren. Zeige, dass aus $\left[\hat{B}, \hat{C}\right]_- = 0$ die Relation $\left[\hat{U}\hat{B}\hat{U}^\dagger, \hat{U}\hat{C}\hat{U}^\dagger\right]_- = 0$ folgt.

(f) Zeige, dass $e^{i\hat{A}t}$ ein unitärer Operator für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.
Hinweis: Falls $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_- = 0$ *so gilt* $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}$.

(g) Zeige, dass die Menge der unitären Operatoren eine Gruppe bildet unter der Operation der Hintereinanderanwendung (im endlichdimensionalen Fall: Matrix-Matrix Multiplikation). Zeige, dass die Menge der hermiteschen Operatoren *keine* Gruppe bildet.
Hinweis: Es reicht hier die nichtoffensichtlichen Gruppeneigenschaften zu überprüfen:
(i) Für jedes Paar unitärer Operatoren $\hat{U}_1$ *und* $\hat{U}_2$ *ist auch* $\hat{U}_1\hat{U}_2$ *ein unitärer Operator.*
(ii) Es existiert ein unitäres $\hat{E}$*, so dass für jedes unitäre* $\hat{U}$ *gilt, dass* $\hat{U}\hat{E} = \hat{E}\hat{U} = \hat{U}$.
(iii) Für jedes unitäre $\hat{U}$ *existiert ein unitäres* $\hat{U}^{-1}$ *mit* $\hat{U}\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{-1}\hat{U} = \hat{E}$.

(h) Zeige, dass die Menge der hermiteschen Operatoren einen reellen Vektorraum unter Operatoraddition bildet. Zeige, dass die Menge der unitären Operatoren *keinen* (reellen oder komplexen) Vektorraum bildet. Zeige außerdem, dass die Menge der hermiteschen Operatoren *keinen* komplexen Vektorraum unter Operatoraddition bilden.
Hinweis: Erneut reicht es die nichtoffensichtlichen Vektorraumeigenschaften zu überprüfen:
(i) Für jedes Paar hermitescher Operatoren $\hat{A}_1$ *und* $\hat{A}_2$ *ist auch* $\hat{A}_1 + \hat{A}_2$ *ein hermitescher Operator.*
(ii) Für jeden hermiteschen Operator $\hat{A}$ *und jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist auch* $\lambda\hat{A}$ *ein hermitescher Operator (bei einem komplexen Vektorraum müsste dies sogar für jedes* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gelten).*
(iii) Es existiert ein hermiteschen $\hat{N}$*, so dass für jedes hermitesche* $\hat{A}$ *gilt, dass* $\hat{A} + \hat{N} = \hat{A}$.
(iv) Zu jedem $\hat{A}$ *existiert ein hermitesches* $\hat{A}_-$*, so dass* $\hat{A} + \hat{A}_- = \hat{N}$.

Aufgabe 3 - Paulimatrizen (20 Punkte)

In dieser Aufgabe behandeln wir den Hilbertraum $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$ und die sogenannten Paulimatrizen, welche in vielen Anwendungen der Quantenmechanik eine fundamentale Rolle spielen. Sie sind definiert durch

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass die Paulimatrizen sowohl hermitesch als auch unitär sind.

(b) Zeige, dass $L(\mathcal{H}_2) = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, also dass jeder lineare Operator ($\equiv$ jede Matrix) auf dem $\mathcal{H}_2$ als reelle Linearkombination der vier Paulimatrizen dargestellt werden kann.

(c) Berechne die Kommutatoren aller Paulimatrizen mit sich selbst und untereinander.
Hinweis: Wenn man gut überlegt, genügt es hier drei Kommutatoren auszurechnen, der Rest folgt oder ist trivial!

(d) Finde die Eigenwerte und (komplexen) Eigenvektoren der Paulimatrizen. Wie verhalten sich die Eigenvektoren zweier Paulimatrizen, wenn ihr Kommutator verschwindet?