Übungszettel 9 - Qubits, Ort, Impuls, Erwartungswerte et al.
(Abgabe: Vorlesung 19.12.2017 *oder* 20.12.2017 bis 11:15 im Fach)

Aufgabe 1 - Tomographie eines Qubits (16 Punkte)

In der Quanteninformationstheorie ist der fundamentale Informationsträger des Quantencomputers ein sogenanntes Qubit, ganz analog zum klassischen Bit für klassische Computer. Ein Qubit ist ein quantenmechanischer Zustand eines zweidimensionalen Hilbertraums, also

$$|\psi\rangle = c_0\,|0\rangle + c_1\,|1\rangle \tag{1}$$

mit $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$, wobei $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ die sogenannte kanonische Basis ist, welche durch die Eigenvektoren von σ_z gegeben ist ($\sigma_z\,|0\rangle = |0\rangle$, $\sigma_z\,|1\rangle = -\,|1\rangle$). Das heißt insbesondere, dass sich in Bezug auf die Matrixdarstellung der Paulioperatoren vom letzten Übungszettel das Qubit in der vektoriellen Form $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ schreiben lässt.

(a) Welche Bedingung kannst du bezüglich c_0 und c_1 aufgrund der Normiertheit von $|\psi\rangle$ aufstellen?

(b) Welche Aussage kannst du über c_0 und c_1 aus der Irrelevanz der globalen Phase eines quantenmechanischen Zustands treffen?

(c) Wie lautet der Erwartungswert des Paulioperators $\hat{\sigma}_0$ für ein beliebiges Qubit nach Gleichung (1)? Welche Information kann aus einer entsprechenden Messung gezogen werden?
Hinweis: Beachte das Ergebnis von Teilaufgabe (a)!

(d) Wie lautet der Erwartungswert der Operatoren der Paulimatrizen $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ und $\hat{\sigma}_z$ in einem allgemeinen Qubit nach Gleichung (1)?

(e) Zeige, dass zur vollständigen Tomographie (Bestimmung des Zustands) eines Qubits die Messung von drei der vier Paulioperatoren notwendig und hinreichend ist.

Aufgabe 2 - Orts- und Impulsraumdarstellung (18 Punkte)

Es sei $|x\rangle$ die Eigenfunktion des Ortsoperators $\hat{x}$ zum Eigenwert x, also

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle\ . \tag{2}$$

Als Eigenfunktionen eines hermiteschen Operators ist der Satz $\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}}$ vollständig, also $\int |x\rangle\langle x|\ dx = \mathbb{1}$ (Integral statt Summe, da wir es hier mit uneigentlichen Eigenzuständen zu tun haben).

(a) Zeige, dass folgende verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation gilt $\forall\,|x\rangle, |x'\rangle :\ \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$.
Hinweis: Multipliziere dazu die Vollständigkeitsrelation von rechts mit einer beliebigen Eigenfunktion $|x'\rangle$ des Ortsoperators.

(b) Zeige, dass $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$. Dies nennt man die Ortsdarstellung der Wellenfunktion $|\psi\rangle$. Zeige, dass die Ortsdarstellung der Eigenfunktion $|x'\rangle$ durch den Ausdruck $x'(x) = \delta(x-x')$ gegeben ist.
Hinweis: Multipliziere die Orthogonalitätsrelation mit $\psi(x)$ und integriere nach x. Dann zeige, dass die Abbildung $\phi_x : |\psi\rangle \mapsto \psi(x)$, welche die Punktauswertung einer Funktion $|\psi\rangle$ an der Stelle x darstellt, ein lineares Funktional ist und damit ein Element des Dualraums $\mathcal{H}'$. Also existiert nach Frechet-Riesz ein $|\phi_x\rangle \in \mathcal{H}$ mit $\forall\,|\phi_x\rangle :\ \langle\phi_x|\psi\rangle = \psi(x)$. Ersetze $\psi(x)$ auf diese Art und Weise und identifiziere $|\phi_x\rangle$ mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation.

(c) Es sei $|p\rangle$ die Eigenfunktion des Impulsoperators $\hat{p}$ zum Eigenwert p, also

$$\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle\ . \tag{3}$$

Die Ortsdarstellung des Impulsoperators ist gegeben durch $\langle x'|\hat{p}|x\rangle = -i\hbar\delta(x-x')\frac{\partial}{\partial x}$. Zeige, dass aus Gleichung (3) folgende Differentialgleichung für die Eigenfunktionen des Impulsoperators in Ortsdarstellung folgt,

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}p(x) = p\cdot p(x)\ .$$

Hinweis: Es gilt $p(x) = \langle x|p\rangle$. Multipliziere Gleichung (3) von links mit $\langle x|$. Dann füge eine $\mathbb{1}$ auf der linken Seite ein, wobei du die Vollständigkeit der Eigenfunktionen des Ortsoperators benutzt.

(d) Zeige, dass (bis auf eine Normierungskonstante) folgende Relation gilt,

$$\langle x|p\rangle = p(x) = e^{\frac{i}{\hbar}px} .$$

(e) Zeige, dass (bis auf eine Normierungskonstante) für die sogenannte Impulsdarstellung der Wellenfunktion, $\langle p|\psi\rangle = \psi(p)$, folgende Relation gilt,

$$\psi(p) = \mathfrak{F}[\psi(x)] ,$$

wobei $\mathfrak{F}$ die eindimensionale Fouriertransformation darstellt. Mit anderen Worten, die Impulsdarstellung der Wellenfunktion folgt aus der Fouriertransformation der Ortsdarstellung.
Hinweis: Streng genommen haben wir in den bisherigen Übungsaufgaben immer Fouriertransformationen nach k anstatt nach p betrachtet, aber hier können wir einfach nach k transformieren und dann die Relation zwischen p und k einsetzen. Außerdem lassen wir die übliche Tilde bei der Fouriertransformation weg, da nun das Argument wirklich entscheidend ist. $\psi(p)$ heißt explizit: Darstellung des Hilbertraumvektors $|\psi\rangle$ in Bezug auf die Eigenfunktionen des Impulsoperators. $\psi(x)$ bezeichnet entsprechend die Darstellung dieses Hilbertraumvektors in Bezug auf die Eigenfunktionen des Ortsoperators.

Aufgabe 3 - Zeitabhängige Erwartungswerte (26 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen hermiteschen, zeitunabhängigen Operator $\hat{A}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sowie einen Zustand $|\psi(t=0)\rangle \in \mathcal{H}$ dessen Zeitentwicklung durch die zeitabhängige Schrödingergleichung zum Hamiltonoperator $\hat{H}$ gegeben ist, also

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle .$$

(a) Zeige explizit, durch Benutzen der Reihendarstellung der Exponentialfunktion als $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)^n$, dass $\frac{d}{dt}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = -\frac{i}{\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{H}$.

(b) Zeige, dass

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\left[\hat{A},\hat{H}\right]_{-}|\psi(t)\rangle .$$

(c) Wann ist eine Observable, welche durch einen Operator $\hat{A}$ repräsentiert wird, eine Erhaltungsgröße eines physikalischen Systems, das durch einen Hamiltonoperator $\hat{H}$ beschrieben wird?

(d) Zeige, dass für ein allgemeines quantenmechanisches System, das durch einen eindimensionalen Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ beschrieben wird, folgende Relationen gelten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle_{|\psi(t)\rangle} &= \frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle_{|\psi(t)\rangle} ,\\ \frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle_{|\psi(t)\rangle} &= -\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle_{|\psi(t)\rangle} .\end{aligned}$$

Wie kann man dies interpretieren?
Hinweis: Vergleiche mit dem zweiten Newtonschen Gesetz!

(e) Wir betrachten den quantenmechanischen Zustands $|\psi(t)\rangle$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators (Masse m, Frequenz ω), für den zum Zeitpunkt $t=0$ folgendes gilt,

$$\begin{aligned}\langle\hat{x}\rangle_{|\psi(0)\rangle} &\equiv x_0 ,\\ \langle\hat{p}\rangle_{|\psi(0)\rangle} &\equiv p_0 .\end{aligned}$$

Bestimme $\langle\hat{x}\rangle_{|\psi(t)\rangle}$ und $\langle\hat{p}\rangle_{|\psi(t)\rangle}$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und interpretiere dein Resultat!
Hinweis: Benutze das Ergebnis von Teilaufgabe (d)!