Probeklausur zur Quantenmechanik I

Diese Probeklausur hat einen Umfang von insgesamt 100 Punkten. Sie liefert Beispiele für Aufgaben, welche in der Klausur vorkommen können. Auf die Klausur selbst wird es auch insgesamt 100 Punkte geben, ihr Umfang wird vergleichbar zu dieser Probeklausur sein. Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt drei volle Zeitstunden.

Die Probeklausur kann am **Dienstag, den 06.02.2018** wie gewohnt zu Beginn der Vorlesung abgegeben werden bzw. bis **Mittwoch, den 07.02.2018 bis 11:15 Uhr im Fach**. **Pro 0,6 Punkte auf dieser Probeklausur kann man sich 1 Zusatzpunkt zu seinen bisherigen Übungszettelpunkten dazuverdienen - also maximal 60 Zusatzpunkte.**

Aufgabe 1 (20 Punkte)

(a) Berechne den Kommutator $\left[\hat{x}^2, \hat{p}\right]_-$. [3P]

(b) Es sei $|0\rangle$ der Grundzustand und $|1\rangle$ der erste angeregte Zustand des harmonischen Oszillators. Wann ist der Zustand $|\psi\rangle = c_0\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$ mit $c_0 \in \mathbb{C}$ ein physikalischer Zustand und warum ist eine Einschränkung auf $c_0 \in \mathbb{R}$ immer möglich wenn es z.B. um die Berechnung von Erwartungswerten in diesem Zustand geht? [3P]

(c) Es seien $|n\rangle$ ($n \in \mathbb{N}_0$) die Eigenzustände eines harmonischen Oszillators (Frequenz ω). Betrachte den Zustand $|\phi\left(t=0\right)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|0\rangle + |2\rangle + |4\rangle\right)$. Ist dies ein gerader, ein ungerader oder ein indefiniter Zustand in Ortsdarstellung? Wie lautet dieser Zustand zu Zeitpunkten $t > 0$? Wann findet das erste "revival" statt? [6P]

(d) Betrachte folgende eindimensionale Schrödingergleichung im k, ω-Raum,

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi\left(k,\omega\right) = \hbar\omega\psi\left(k,\omega\right)\,.$$

Wie lautet die dazu gehörige Schrödingergleichung im x, t-Raum? Welches physikalische Problem wird hier beschrieben? [4P]

(e) Skizziere grob den Transmissions- und Reflexionskoeffizienten eines Teilchens in Abhängigkeit der Energie E an einer rechteckigen, eindimensionalen Potentialstufe der Höhe V_0 im Bereich $0 \leq E \leq V_0$ für eine konstante, endliche Breite der Potentialstufe. (Die "Nulllinie" der Potentialstufe sei wie üblich zu $E = 0$ gesetzt.) [4P]

Aufgabe 2 (18 Punkte)

Die Paulimatrizen sind gegeben durch

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es sei folgende 2×2 Dichtematrix gegeben (mit $P_x, P_y, P_z \in \mathbb{R}$),

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_2 + P_x\hat{\sigma}_x + P_y\hat{\sigma}_y + P_z\hat{\sigma}_z\right)\,.$$

Zeige, dass $\hat{\rho}$ hermitesch ist und $\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\right) = 1$ gilt. Zeige außerdem, dass $\langle\hat{\sigma}_i\rangle_{\hat{\rho}} = P_i$ für $i = x, y, z$.
Hinweis: Es ist nützlich zunächst die Produkte $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j$ zu berechnen, wobei i, j die Werte x, y, z annehmen können. Es wird sich zeigen, dass diese Produkte entweder die Einheitsmatrix oder erneut eine Paulimatrix ergeben.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Es seien folgende drei Operatoren in Matrixdarstellung gegeben,

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Kommutatoren $\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right]_-$ wobei i und j jeweils die Werte x, y, z annehmen können. [8P]

(b) Notiere die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{J}_z$. [2P]

(c) Berechne $\hat{\vec{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$. Finde eine gemeinsame Eigenbasis von $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_z$. [4P]

(d) Welche physikalischen Vektoroberservable $\hat{\vec{J}}$ mit Komponenten $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ ist durch obige Matrizen dargestellt? Begründe deine Entscheidung! Gib ein Beispiel für ein physikalisches System an, dessen Eigenschaften durch diesen Satz an Observablen beschrieben werden können. Was ändert sich wenn man an Stelle von $\hat{J}_x, \hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ die Operatoren $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x, \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y, \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z$ betrachtet ($\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ sind die Paulimatrizen)? [6P]

Aufgabe 4 (18 Punkte)

Betrachte die Eigenzustände des Wasserstoffatoms $|nlm\rangle$ mit der Hauptquantenzahl $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, der Bahndrehimpulsquantenzahl $l \in \mathbb{N}_0,\ l < n$ und der magnetischen Quantenzahl $m \in \mathbb{Z},\ |m| \leq l$.

(a) Notiere das Spektrum des Wasserstoffatoms. Wie groß ist der Entartungsgrad für die jeweiligen Eigenenergien? [3P]

(b) Betrachte den Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha\,|100\rangle + \beta\,|211\rangle + \gamma\,|21(-1)\rangle\ , \tag{1}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Welche Bedingungen gelten für α, β und γ, damit $|\psi\rangle$ einem reinen quantenmechanischen Zustand entspricht, der sich mit 50% Wahrscheinlichkeit in einem Zustand mit Hauptquantenzahl $n = 1$ und mit 50% Wahrscheinlichkeit in einem Zustand mit Hauptquantenzahl $n = 2$ befindet? [3P]

(c) Wie lautet der Erwartungswert des Drehimpulses in z-Richtung für den Zustand $|\psi\rangle$ aus Gleichung (1)? Welche Bedingungen müssen für α, β und γ gelten, damit dieser Erwartungswert verschwindet? [4P]

(d) Wir betrachten die beiden Zustände

$$|\phi_1\rangle = |100\rangle\,, \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|211\rangle + |21\,(-1)\rangle\right]\ .$$

Zeige, dass der Erwartungswert des Drehimpulses in z-Richtung für beide Zustände verschwindet. Angenommen man würde experimentell den Drehimpuls in z-Richtung eines Wasserstoffatom in dieses beiden Zuständen messen - welche Wahrscheinlichkeitsverteilung von Messergebnissen würde man jeweils erwarten? Wie hängt diese Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert zusammen? [8P]

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Betrachte ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einer Dimension in folgendem Potential,

$$V\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x \geq 0 \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizziere das Potential. [2P]

(b) Zeige, dass die Eigenfunktionen dieses Systems zur Eigenenergie E in Ortsdarstellung folgende Differentialgleichung für $x \geq 0$ erfüllen ($\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$, $\tilde{E} = \frac{2m}{\hbar^2}E$), [4P]

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi\,(x) + \beta^4 x^2 \psi\,(x) = \tilde{E}\psi\,(x)\ . \tag{2}$$

(c) Für die Hermite-Polynome $H_n\,(z)$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) gilt die Relation

$$\frac{d^2}{dz^2}H_n\,(z) - 2z\frac{d}{dz}H_n\,(z) + 2nH_n\,(z) = 0\,.$$

Zeige, dass folgender Ansatz die Differentialgleichung (2) löst,

$$\psi_n\,(x) = N_n e^{-\frac{\beta^2}{2}x^2} H_n\left(\frac{x}{\beta}\right)\,, \tag{3}$$

für eine Normierungskonstante $N_n \in \mathbb{R}$ (diese muss nicht bestimmt werden). Bestimme die dazu gehörigen Werte für die Eigenenergie. [11P]

(d) Es zeigt sich, dass alle Eigenfunktionen in diesem Problem die Form von Gleichung (3) besitzen. Begründe, warum jedoch nur Wellenfunktionen nach Gleichung (3) mit ungeraden Werten von n eine physikalisch erlaubte Lösung darstellen. Notiere die Grundzustandsenergie und skizziere die Wahrscheinlichkeitsdichte der Grundzustandswellenfunktion im Potential. [7P]
Hinweis: Es gilt $H_n\,(0) = (-2)^{\frac{n}{2}}\,(n-1)!!$ falls n gerade (insbesondere ist $H_0\,(0) = 1$). Außerdem sind die Hermite-Polynome ungerade Funktionen falls n ungerade ist.