Übungszettel 1 - Vektoralgebra und Vektoranalysis, δ-Funktion (Abgabetermin: 22.10.2014)

Aufgabe 1 - Kronecker und Levi-Civita (14 Punkte + 8 Zusatzpunkte)

(a) Das Kronecker-Delta ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass sich das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ als $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{ij} \delta_{ij} a_i b_j$ schreiben laesst.

(b) Es sei $\hat{e}_i$ der Einheitsvektor in i-Richtung. Zeige, dass folgende Relation für das Kreuzprodukt gilt,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i a_j b_k,$$

wobei $\epsilon_{ijk} = 1$ wenn ijk eine zyklische Permutation ist (also $123, 231$ oder 312), $\epsilon_{ijk} = -1$ wenn ijk eine antizyklische Permutation ist (also $321, 213$ oder 132) und $\epsilon_{ijk} = 0$ sonst. Man nennt ϵ_{ijk} den Levi-Civita Tensor.

(c) Beweise die "bac-cab" Regel,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

mit einer von folgenden beiden Methoden (ein unabhängiger Beweis für beide Methoden gibt Zusatzpunkte).

(i) Benutze die Kontraktionseigenschaft des Levi-Civita Tensors,

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

(ii) Zeige durch direktes Nachrechnen, dass für alle 27 Kombinationen von Basisvektoren $\hat{e}_i, \hat{e}_j, \hat{e}_k$ folgende Relation gilt,

$$\hat{e}_i \times (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \hat{e}_j \left(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_k\right) - \hat{e}_k \left(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j\right). \tag{1}$$

Schlussfolgere dann mit Hilfe der Bilinearität von Kreuz- und Skalarprodukt, dass Gleichung (1) tatsächlich für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe 2 - Vektoranalysis (24 Punkte)

Je nach Kontext werden in dieser Aufgabe x, y, z und die entsprechenden Basisvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ synonym verwendet mit der Notation x_1, x_2, x_3 und $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.

(a) Der Gradient eines Skalarfelds $f(x,y,z) = f(\vec{r})$ ist definiert über $\operatorname{grad}(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{e}_i$. Bestimme den Gradienten der Skalarfelder $f_1(\vec{r}) = |\vec{r}|$, $f_2(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$, $f_3(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$, wobei $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ und $\vec{r}_0$ ein konstanter Vektor ist.

(b) Die Divergenz bzw. Rotation eines Vektorfelds $\vec{g}(x,y,z) = \vec{g}(\vec{r})$ mit Komponenten $g_x(\vec{r}), g_y(\vec{r}), g_z(\vec{r})$ ist definiert über $\operatorname{div}(\vec{g}) = \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ bzw. $\operatorname{rot}(\vec{g}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$. Zeige, dass

$$\operatorname{rot}(\vec{g}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Bestimme Divergenz und Rotation der Vektorfelder $\vec{g}_1(\vec{r}) = \vec{r}$ sowie $\vec{g}_2(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}$.

(c) Man definiert den so genannten Nabla-Operator als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Zeige, dass mit dieser Definition folgende formale Ausdrücke für Gradient, Divergenz und Rotation gelten,

$$\operatorname{grad}(f) = \vec{\nabla} f, \quad \operatorname{div}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g}, \quad \operatorname{rot}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{g}.$$

(d) Es seien f ein stetig differenzierbares Skalarfeld und $\vec{g}, \vec{h}$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeige folgende Relationen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{g}\right) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{g}\right) &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}\right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{g}. \end{aligned}$$

Hinweis: Es ist möglich alle Ausdrücke komponentenweise zu zeigen. Unter Benutzung der Summenschreibweise geht es aber viel schneller. Beachte auch Aufgabe 1 (c) (i).

Aufgabe 3 - Delta-Funktion (22 Punkte)

(a) Skizziere einige Elemente der Funktionenschar

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

für verschiedene Werte von ϵ.

(b) Zeige, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)\, g(x) \; dx \right] = g(0)\,. \tag{2}$$

Hinweis: Entwickle $g(x)$ in eine Taylor-Reihe und schaue dir dann das Ergebnis des Integrals für die einzelnen Terme an. Die Stammfunktion von $f_\epsilon(x)$ ist durch den Ausdruck $F_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ gegeben.

(c) Der "Grenzwert" der Funktionenschar $f_\epsilon(x)$ für $\epsilon \to 0^+$ wird als Delta-Funktion $\delta(x)$ bezeichnet und wird im Sinne von Gleichung (2) über diejenige "Funktion" definiert, welche für alle $g(x)$ folgende Relation erfüllt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, g(x) = g(0)\,. \tag{3}$$

Zeige mit Hilfe von Gleichung (3), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \; dx = 1, \qquad \delta(-x) = \delta(x)\,.$$

(d) Zeige, dass $\forall x \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(t) \; dt = \theta(x)\,,$$

wobei $\theta(x) = 1$ falls $x > 0$ und $\theta(x) = 0$ sonst.
Hinweis: Vesuche das Integral auf die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, g_x(t) \; dt$$

zu bringen für eine geeignete Funktion $g_x(t)$.

(e) Zeige, dass $\forall a, b \neq 0$

$$\int_a^b \delta(x)\, g(x) \; dx = \begin{cases} g(0)\,, & \text{falls } 0 \in [a, b] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$