Übungszettel 10 - Frohe Weihnachten und Guten Rutsch (Abgabetermin: 14.01.2015)

Aufgabe 1 - Magnetische Monopole (18 Punkte)

In dieser Aufgabe analysieren wir, wie sich die Theorie des Elektromagnetismus durch die Existenz von magnetischen Monopolen verändern würde, mit anderen Worten falls eine magnetische Ladungsdichte $\rho_m(\vec{r}, t)$ existieren würde, wobei

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m \,. \tag{1}$$

(a) Berechne das Magnetfeld einer magnetischen Punktladung mit Ladung q_m im Koordinatenursprung mit Hilfe von Gleichung (1).

(b) Zeige, dass das Induktionsgesetz (homogene Maxwellgleichung für das elektrische Feld) mit zeitabhängigen magnetischen Ladungsdichten inkompatibel ist.

(c) Motiviere eine Kontinuitätsgleichung der magnetischen Ladung,

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = 0 \,,$$

wobei $\vec{j}_m$ die magnetische Stromdichte ist.
Hinweis: Führe deine Argumentation analog zur konventionellen Kontinuitätsgleichung durch. Es reicht eine kurze mathematische Umformung und ein überzeugendes physikalisches Argument!

(d) Modifiziere das Induktionsgesetz unter Benutzung der magnetischen Stromdichte, sodass die Inkonsistenz aus Teilaufgabe (b) verschwindet. Notiere schließlich die Maxwell-Gleichungen (mit $\mu_r = \epsilon_r = 1$) für ein Universum, in dem magnetische Monopole und elektrische Monopole (und dementsprechend elektrische sowie magnetische Stromdichten) existieren.

Aufgabe 2 - Mirror Gallery (30 Punkte)

Betrachte einen geerdeten Leiter, der folgendes Gebiet des $\mathbb{R}^3$ ausfüllt,

$$\left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -2a\right\} \cup \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2a\right\} \,.$$

wobei $a > 0$. Betrachte eine Punktladung mit Ladung q am Ort $(-a, 0, 0)$ und eine Punktladung mit Ladung $-q$ am Ort $(a, 0, 0)$.

(a) Fertige eine Skizze für dieses Problem an.

(b) Begründe, warum sich dieses Problem im Raum $\left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \leq 2a\right\}$ effektiv durch eine Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \delta(y)\,\delta(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} q \delta(x - (2k+1)\,a)$$

beschreiben lässt. Zeige explizit, dass das Potential auf dem Leiter verschwindet.
Hinweis: Spiegelladungsmethode! Skizze!

(c) Berechne die Feldenergie E dieser Anordnung.
Hinweis: Da wir es mit Punktladungen zu tun haben, ist es sinnvoll den Ausdruck

$$E = E_+ + E_- = \frac{1}{2}(qV_+ - qV_-)$$

zu benutzen wobei V_+ das Potential aller Ladungen außer der (realen) Ladung q am Ort $(-a, 0, 0)$ ist und V_- das Potential aller Ladung außer der (realen) Ladung $-q$ am Ort $(a, 0, 0)$ ist. Beweise (Taylorreihe von $\ln(1+x)$) und benutze den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln(2) \,.$$

(d) Wie groß ist die jeweilige Kraft auf die beiden Punktladungen? Wie würdest du die Kraft auf die Leiter berechnen?
Hinweis: Hier sind keine Rechnungen nötig! Überlege für die zweite Frage, welche Spiegelladungen welchen Leiter "repräsentieren"!

Aufgabe 3 - Rotierende Vollkugel (24 Punkte)

Betrachte eine homogen geladene Vollkugel im Vakuum mit Radius R und Gesamtladung Q, welche mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ rotiert.

(a) Fertige eine Skizze an.

(b) Bestimme $\rho(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$.
Hinweis: Vergiss nicht die notwendigen Symmetrieargumente, falls du den Satz von Gauß verwendest!

(c) Zeige, dass das Vektorpotential dieser Anordnung folgende Form annimmt,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \omega Q}{8\pi} \left(\frac{r}{R} - \frac{3r^3}{5R^3} \right) \sin\theta \hat{e}_\varphi, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 \omega Q}{20\pi} \frac{R^2}{r^2} \sin\theta \hat{e}_\varphi, & r \geq R \end{cases}.$$

Hinweis: Benutze das Ergebnis von Aufgabe 1a vom letzen Zettel und ersetze $R \to \bar{R}$, $\sigma \to \rho d\bar{R}$. Dann integriere über $\bar{R}$. Beachte, dass man "innen" zwei Beiträge hat. Warum ist das eine sinnvolle Vorgehensweise?

(d) Bestimme $\vec{B}(\vec{r})$.

Aufgabe 4 - Supraleitung I (18 Punkte)

Innerhalb eines perfekten Leiters gilt $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$.

(a) Wo können sich am/im Leiter freie Ladungen aufhalten? Begründe deine Antwort!

(b) Zeige, dass innerhalb eines perfekten Leiters die Relation $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ gilt. Schlussfolgere, dass der magnetische Fluss durch eine perfekte Leiterschleife zeitlich konstant ist.

(c) Ein Supraleiter ist ein perfekter Leiter, in dessen Leiterinneren zusätzlich die Relation $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ gilt. Schlussfolgere, dass in diesem Leiter nur Strom auf der Oberfläche fließen kann.

(d) Eine Hohlkugel aus Niobium mit Radius R befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ bei Raumtemperatur. Die Kugel wird auf eine Temperatur von 5 K abgekühlt. Bestimme die induzierte Oberflächenladungsdichte $\vec{K} \equiv \sigma \vec{v}$ in Kugelkoordinaten.
Hinweis: Die kritische Temperatur von Niobium, also die Temperatur unterhalb derer es sich wie ein Supraleiter verhält, liegt bei $T_c \simeq 9,2\,\mathrm{K}$. Das Magnetfeld im Inneren einer rotierenden Hohlkugel (Radius R) um die z-Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω und Oberflächenladungsdichte σ lautet (siehe letzter Zettel): $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 R \omega \sigma \hat{e}_z$. Benutze das Ergebnis aus Teilaufgabe (c)!

Aufgabe 5 - Supraleitung II (30 Punkte)

Betrachte einen unendlich ausgedehnten Supraleiter in der Region $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\right\}$ sowie einen magnetischen Punktdipol (Masse M und Dipolmoment $\vec{m}$) am Ort $(0, 0, a)$, der so fixiert ist, dass $\vec{m}$ in positive z-Richtung zeigt.

(a) Skizziere diese Anordnung.

(b) Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \to 0^+} B_z(x, y, z) = 0$.

(c) Benutze einen Bildmagnetdipol um das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ auf der Oberfläche des Supraleiters zu berechnen. Fertige eine Skizze an! Berechne die Kraft auf den "echten" Dipol. Falls der "echte" Dipol sich frei bewegen kann (bei fixierter Ausrichtung), auf welcher Höhe h würde er über dem Supraleiter schweben, falls die Erdgravitation in negative z-Richtung wirkt?
Hinweis: Das Magnetfeld eines magnetischen Punktdipols $\vec{m}$ im Koordinatenursprung ist gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3 (\vec{m} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{m} \right]$$

Die Wechselwirkungsenergie E_{dip} in einem Magnetfeld $\vec{B}$ ist gegeben durch $E_{dip} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Zylinderkoordinaten könnten hilfreich sein. Überlege dabei, wie $\hat{e}_r$ für die beiden Dipole jeweils in Zylinderkoordinaten aussieht.

(d) Bestimme die Höhe und Orientierung des magnetischen Punktdipols wenn die Fixierung aufgehoben wird und er also frei rotieren kann.
Hinweis: Zeige zunächst, dass das Drehmoment $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ auf den realen Punktdipol folgendermaßen lautet,

$$\left| \vec{N} \right| = \frac{\mu_0 \left| \vec{m} \right|^2}{32 \pi a^3} \sin\theta \cos\theta \,,$$

falls er sich in Hohe a über dem Supraleiter befindet und $\vec{m} \cdot \hat{e}_z = m \cos\theta$. Warum ist nur die Position $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ wirklich stabil?
Bemerkung: Eine Demonstration des in dieser Aufgabe analysierten Effekts kann man z.B. auf `https://www.youtube.com/watch?v=pO2eDJBr50E` finden!